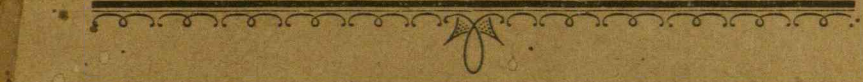
Lietuvos Universiteto Matematikos Gamtos Fakulteto Darbai 1929-1930

Mémoire de la Faculté des Sciences de l'Université de Lithuanie 1929-1930



V t.

I sąsiuvinys

Matematikos skyrius
Section de Mathématiques

Redaktorius *prof. A. Purėnas*

1930 V. D. M. :-: „Spindulio" spaustuvė :-: Kaunas

Turinys.

Pusl.

Prof. O. Volk'as. Kreivių tinklų ant paviršių tyrinėjimai . . 3

Über Kurvennetze auf Flächen 5

P. Katilius. Kreivių tinklų ant paviršių tyrinėjimai 35

Über Kurvennetze auf Flächen 36

Prof. A. Dambrauskas. Apie sulrautines stačiakampes trigonometrijos sistemas 70

Über zusammengesetzte trigonometrische Systeme

Prof. A. Dambrauskas. Matematiškos sąlygos kreiviems paviršiams nuo plokščių ir kreivėms nuo plokščiųjų atskirti 124

Conditiones mathematicae, quibus superficies curvae a plano et lineae curvae a rectis distingitur

Meteoritas, kritęs Lietuvoje 1929 metų vasario mėn. 9 d.:

I. *Prof. K. Sleževičius.* Meteorito ieškojimas . . . 131

Die Aufsuchung der im Jahre 1929 niedergefallenen Meteoriten

II. *Doc. Kodatis.* Rastųjų meteoritų identifikacija ir orbitos susekimas. 141

Bahnbestimmung und Identifikationsbeweis der gefundenen Meteoriten

III. *Prof. M. Kaveckis.* Meteoritų sąstatas ir jų apibūdinimas 151

Kurze Zusammenfassung der Erforschung des in Litauen niedergefallenen Meteorits

Prof. Z. Žemaitis. Matematikos istoriografija ir Moritz Cantor 177

Mathematische Historiographie und Moritz Cantor

AKC. „SPINDULIO“ B-VĖS SPAUSTUVĖ KAUNE.

Lietuvos Universiteto Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai 1929–1930

Mémoires de la Faculté des Sciences de l'Université de Lithuanie 1929–1930

T. V.

I. sąsiuvinys

Matematikos Skyrius
Section de Mathématiques

1930 V. D. M. :-: :-: :-: :-: :-: :-: KAUNAS.

Kreivių tinklų ant paviršių tyrinėjimai.

Nr. 1.

Apie paviršius, turinčius izogonalinius tinklus iš pastovaus geodetinio kreivumo kreivių.

Parašė O. VOLK'AS.

Šiame darbe randasi nagrinėjimų apie rombinius tinklus' sudarytus iš pastovaus geodetinio kreivumo kreivių, pirmieji rezultatai: yra susekti visi paviršiai, ant kurių egzistuoja izogonaliniai rombiniai tinklai, sudaryti iš pastovaus geodetinio kreivumo kreivių, ir įrodyti sekanti dėsniai:

1. Pastovaus kreivumo paviršiai yra vienintėliai paviršiai, ant kurių dvi pastovaus geodetinio kreivumo kreivių sistemos sudaro neizometrinį izogonalinį rombinį tinklą.

2. Rombinio tinklo, sudaryto iš pastovaus geodetinio kreivumo kreivių, diagonalinės kreivės sudaro dvigubą pastovaus geodetinio kreivumo kreivių sistemą, kurios taip pat gali būti rombiškai sutvarkytos.

3. Plokštumoj dvi apskritimų šeimos sudaro izogonalinį tinklą su kampu $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$ tuomet ir tik tuomet, kai jos sudaro du einančiu per tą patį tašką parabolišku pluoštu, kurių ašys sudaro kampą ϑ.

4. Dvi apskritimų šeimos sudaro izometrinį tinklą tuomet ir tik tuomet, kai jos sudaro eliptišką ir hiperbolišką pluoštą arba du einančiu per tą patį tašką parabolišku pluoštu su statmenomis ašimis.

5. Ant rutulio sudaro dvi apskritimų šeimos izogonalinį rombinį tinklą su kampu $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$, jei jos sudaro du einančiu per tą patį tašką parabolišku pluoštu, kurių ašys sudaro kampą ϑ.

6. Ant pseudosferos dvi pastovaus geodetinio kreivumo kreivių šeimos sudaro rombinį tinklą su kampu $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$ tuomet ir tik tuomet, kai jos sudaro du einančiu per tą patį tašką parabolišku pluoštu, kurių ašys sudaro kampą ϑ. Neigiamo pastovaus kreivumo paviršiai yra vienintėliai, ant kurių toki tinklai taip egzistuoja, kad visos vienos ir antros sistemos kreivės turi tą patį pastovų geodetinį kreivumą.

7. Ant rutulio dvi apskritimų šeimos sudaro įzometrinį tinklą, jei jos sudaro eliptišką ir hiperbolišką pluoštą arba du einančiu per tą patį tašką parabolišku pluoštu su statmenomis ašimis.

8. Ant pseudosferos dvi pastovaus geodetinio kreivumo kreivių šeimos sudaro izometrinį tinklą, jei jos sudaro eliptišką ir hiperbolišką pluoštą arba du einančiu per tą patį tašką parabolišku pluoštu statmenomis ašimis. Neigiamo kreivumo paviršiai yra vienintėliai, ant kurių egzistuoja toki izometriniai tinklai, kad visos vienos ir antros šeimos kreivės turi tą patį pastovų geodetinį kreivumą.

9. Sferiniai ir pseudosferiniai sukimosi paviršiai yra vienintėliai sukimosi paviršiai, ant kurių egzistuoja izometriniai pastovaus geodetinio kreivumo kreivių tinklai.

Über Kurvennetze auf Flächen.

Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der litauischen Universität in Kaunas.

Nr. 1.

Über Flächen mit isogonalen rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung.

Von

Otto Volk in Kaunas (Litauen).

Im folgenden handelt es sich um die Bestimmung aller Flächen, auf denen zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung ein rhombisches Netz mit überall konstantem Winkel bilden. Es wird zich zeigen, dass die Flächen konstanten Krümmungsmasses die einzigen Flächen sind, die solche Netze mit einem Winkel zulassen, der von $\frac{\pi}{2}$ verschieden ist, und weiter, dass die sphärischen und pseudosphärischen Rotationsflächen die einzigen Rotationsflächen mit orthogonalen rhombischen (isometrischen) Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung sind. Der Verlauf der einzelnen Netze würde sich mittels einer stereographischen Polarprojektion bzw. Beltramitransformation der Ebene auf die Kugel bzw. auf die Pseudosphäre aus dem Falle der Ebene ableiten lassen; im folgenden ist aber der direkte Weg der Bestimmung der besagten Netze in der Ebene, auf der Kugel und der Pseudosphäre eingeschlagen.

§ 1.

Das Bogenelement der Flächen mit isogonalen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung.

Hat das Quadrat des Bogenelementes die Form:

$$(1) \qquad ds^2 = A^2du^2 + 2AC\cos\vartheta\, du\, dv + C^2dv^2,$$

wo ϑ den Winkel bedeutet, den die Kurven u, v miteinander bilden, so schreiben sich die Bedingungen dafür, dass die Parameterkurven u, v die konstante geodätische Krümmung $-U_1$ bzw. $-V_1$ haben, für

$$(2) \qquad A = C$$

in der Form:

$$A_u - \frac{\partial}{\partial v}(A\cos\vartheta) = U_1 A^2 \sin\vartheta,$$

$$A_v - \frac{\partial}{\partial u}(A\cos\vartheta) = V_1 A^2 \sin\vartheta.$$

Ist ϑ konstant, so kommt hieraus:

$$(3) \qquad \begin{cases} A_u - A_v\cos\vartheta = U_1 A^2 \sin\vartheta, \\ A_v - A_u\cos\vartheta = V_1 A^2 \sin\vartheta, \end{cases}$$

also:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{A_u}{A^2} = \dfrac{U_1 + V_1\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \\ \dfrac{A_v}{A^2} = \dfrac{V_1 + U_1\cos\vartheta}{\sin\vartheta}. \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingung verlangt für $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$:

$$U_1' = V_1' = -2\varkappa\sin\vartheta,$$

somit:

$$(5) \qquad \begin{cases} U_1 = -(2\varkappa u + \alpha)\sin\vartheta, \\ V_1 = -(2\varkappa v + \beta)\sin\vartheta, \end{cases}$$

wo $\alpha, \beta, \varkappa$ beliebige Konstante bedeuten. Aus (4) erhält man durch Integration:

$$(6)\quad A=\frac{1}{\varkappa(u^2+v^2+2uv\cos\vartheta)+(\alpha+\beta\cos\vartheta)u+(\beta+\alpha\cos\vartheta)v+\gamma},$$

wo γ eine weitere beliebige Konstante darstellt. Das Quadrat des Bogenelements erhält daher die Form:

$$(7)\quad ds^2=\frac{du^2+2\cos\vartheta\,du\,dv+dv^2}{(\varkappa(u^2+v^2+2uv\cos\vartheta)+(\alpha+\beta\cos\vartheta)u+(\beta+\alpha\cos\vartheta)v+\gamma)^2}.$$

Aus der Liouvilleschen Formel für das Krümmungsmass K

$$K=-\frac{1}{AC\sin\vartheta}\left\{\vartheta_{uv}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C_u-A_v\cos\vartheta}{A\sin\vartheta}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A_v-C_u\cos\vartheta}{C\sin\vartheta}\right)\right\}$$

findet man unmittelbar:

$$(8)\quad K=4\varkappa\gamma-(\alpha+\beta)^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}-(\alpha-\beta)^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Daraus folgt der Satz:

Die Flächen konstanten Krümmungsmasses sind die einzigen Flächen, auf denen zwei Systeme von Kurven konstanter geodätischer Krümmung ein nichtisometrisches isogonales rhombisches Netz bilden.

Dieser Satz kann als eine Eweiterung eines Satzes des Herrn *A. Voss*[1]) betrachtet werden, der einen bekannten Satz von Liouville verallgemeinert und besagt, dass *nur auf den Flächen mit konstantem negativem Krümmungsmasse zwei Systeme von Kurven existieren von der Beschaffenheit, das die Kurven jedes Systems dieselbe konstante geodätische Krümmung besitzen und jede Kurve des einen Systems mit jeder Kurve des andern einen konstanten Winkel einschliesst;* er ergibt sich aus (5) und (8) für $\varkappa=0$ unmittelbar.

Ist $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ so kommt aus (3):

$$A^2=\frac{1}{(\int U_1du+\int V_1dv)^2},$$

woraus folgt, dass *isometrische Systeme aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung nur auf den Flächen existieren, deren Bogenelement bestimmt ist durch:*

---

[1]) Vgl. *A. Voss*, Über die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse. Bd. XXII (1892), S. 268.

$$(9)\qquad ds^2=\frac{1}{(\int U_1\,du+\int V_1\,dv)^2}(du^2+dv^2)\,.$$

Dies ist bereits von *O. Bonnet*[2]) bemerkt worden.

Nimmt man $\varkappa\neq 0$, so kann man $\alpha=\beta=0$ setzen; dann lässt sich (7) in der Form schreiben:

$$(10)\qquad ds^2=\frac{\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2}\,d(u+v)^2+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\,d(u-v)^2\right)}{\left(\varkappa\left((u+v)^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}+(u-v)^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)+\gamma\right)^2}\,;$$

für $\varkappa=0$ kann man aber schreiben:

$$(11)\qquad ds^2=\frac{\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2}\,d(u+v)^2+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\,d(u-v)^2\right)}{\left((\alpha+\beta)\cos^2\frac{\vartheta}{2}(u+v)+(\alpha-\beta)\sin^2\frac{\vartheta}{2}(u-v)+\gamma\right)^2}\,.$$

Aus dem oben erwähnten Bonnetschen Satze folgt dann sofort:

Die Diagonalkurven eines nichtisometrischen isogonalen rhombischen Netzes aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung bilden ein doppeltes Orthogonalsystem von Kurven konstanter geodätischer Krümmung, die sich ebenfalls rhombisch anordnen lassen. Ihre geodätische Krümmung ist:

$$g_{u+v}=2\varkappa(u+v)\cos\frac{\vartheta}{2},\qquad g_{u+v}=2(\alpha+\beta)\cos\frac{\vartheta}{2},$$

bzw.

$$g_{u-v}=2\varkappa(u-v)\sin\frac{\vartheta}{2},\qquad g_{u-v}=2(\alpha-\beta)\sin\frac{\vartheta}{2}.$$

§ 2.

Die abwickelbaren Flächen.

Um die entsprechenden Kreisnetze in der Ebene für $\vartheta\neq\frac{\pi}{2}$ zu bestimmen, haben wir von der Form (7) des Quadrates des Bogenelementes auszugehen. Da nach (8) $\varkappa\neq 0$ sein muss, so können wir $\alpha=\beta=0$ setzen; dann muss $\gamma=0$ sein. Die Substitution

---

[2]) Vgl. *J. Knoblauch*, Grundlagen der Differentialgeometrie. Leipzig u. Berlin, 1913. S. 330 und S. 612 (Nr. 59).

$$(12) \qquad \bar{u} = (u+v)\cos\frac{\vartheta}{2}, \quad \bar{v} = (u+v)\sin\frac{\vartheta}{2}$$

führt (7) über in:

$$(13) \qquad ds^2 = \frac{1}{\varkappa^2(\bar{u}^2+\bar{v}^2)^2}(d\bar{u}^2+d\bar{v}^2).$$

Wir können nun $\varkappa = \frac{1}{2}$ setzen. Durch den Ansatz

$$x_{\bar{u}} = \frac{2}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}\cos\varphi, \quad y_{\bar{u}} = \frac{2}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}\sin\varphi,$$

$$x_{\bar{v}} = -\frac{2}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}\sin\varphi, \quad y_{\bar{v}} = \frac{2}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}\cos\varphi$$

wird man unmittelbar auf die Beziehungen geführt:

$$x_{\bar{u}} - y_{\bar{v}} = 0, \quad y_{\bar{u}} + x_{\bar{v}} = 0,$$

oder:

$$y_{\bar{u}\,\bar{u}} + y_{\bar{v}\,\bar{v}} = 0,$$

also:

$$(14) \qquad \begin{cases} y = \mathrm{F}(\bar{u}+i\bar{v}) + i\Phi(\bar{u}-i\bar{v}), \\ x = -i(\mathrm{F}(\bar{u}+i\bar{v}) - i\Phi(\bar{u}-i\bar{v}), \end{cases}$$

wobei wir, wie überhaupt im folgenden, unwesentliche Konstante fortlassen. Die Bedingung

$$x_{\bar{u}}^2 + y_{\bar{u}}^2 = \frac{4}{(\bar{u}^2+\bar{v}^2)^2}$$

gibt dann die Funktionalgleichung:

$$\mathrm{F}'\cdot\Phi' = \frac{1}{(\bar{u}^2+\bar{v}^2)},$$

woraus sofort folgt:

$$\mathrm{F} = \frac{l}{\bar{u}+i\bar{v}}, \quad \Phi = \frac{1}{l(\bar{u}-i\bar{v})}.$$

Die Realität von x und y verlangt $l = \cos\alpha + i\sin\alpha$; so kommt schliesslich aus (10):

$$x = \frac{2(\cos\alpha\cdot\bar{u}+\sin\alpha\cdot\bar{v})}{\bar{u}^2+\bar{v}^2},$$

$$y = \frac{2(\sin\alpha\cdot\bar{u}-\cos\alpha\cdot\bar{v})}{\bar{u}^2+\bar{v}^2},$$

oder bei Beachtung von (12):

$$(15)\quad \begin{cases} x = \dfrac{2(\cos(\alpha - \frac{\vartheta}{2})\cdot u + \cos(\alpha + \frac{\vartheta}{2})\cdot v)}{u^2 + v^2 + 2uv\cos\vartheta}, \\ y = \dfrac{2(\sin(\alpha - \frac{\vartheta}{2})\cdot u + \sin(\alpha + \frac{\vartheta}{2})\cdot v)}{u^2 + v^2 + 2uv\cos\vartheta}; \end{cases}$$

die Kurven u, v sind die Kreise:

$$(16)\quad \begin{cases} u\sin\vartheta(x^2+y^2) = 2(x\sin(\alpha+\frac{\vartheta}{2}) - y\cos(\alpha+\frac{\vartheta}{2})), \\ v\sin\vartheta(x^2+y^2) = 2(y\cos(\alpha-\frac{\vartheta}{2}) - x\sin(\alpha-\frac{\vartheta}{2})). \end{cases}$$

Hieraus folgt:

Zwei Scharen von Kreisen bilden ein isogonales rhombisches Netz mit dem Winkel $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$ *dann und nur dann, wenn sie zwei durch denselben Punkt hindurchgehende parabolische Büschel bilden, deren Achsen den Winkel* ϑ *einschliessen.*

Wird $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so hat man nach (9):

$$(17)\quad ds^2 = \frac{1}{(U+V)^2}(du^2 + dv^2);$$

der Ansatz

$$x_u = \frac{1}{U+V}\cos\varphi, \quad y_u = \frac{1}{U+V}\sin\varphi,$$

$$x_v = -\frac{1}{U+V}\sin\varphi, \quad y_v = \frac{1}{U+V}\cos\varphi$$

führt dann wieder auf:

$$(18)\quad \begin{cases} y = \mathrm{F}(u+iv) + \Phi(u-iv), \\ x = -i(\mathrm{F}(u+iv) - \Phi(u-iv)) \end{cases}$$

mit der Funktionalgleichung:

$$(19)\quad 4\,\mathrm{F}'\Phi' = \frac{1}{(U+V)^2}.$$

Differentiieren wir logarithmisch nach $u+iv$ bzw. $u-iv$, so erhalten wir hieraus:

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{F}''}{\mathrm{F}'} = -\dfrac{U'-iV'}{U+V}, \\ \dfrac{\Phi''}{\Phi'} = -\dfrac{U'+iV'}{U+V}, \end{cases}$$

woraus sich sofort die Beziehung ergibt:

$$UU'' - U'^2 + VV'' - V'^2 + VU'' + UV'' = 0 . \tag{21}$$

Differentiation nach u und v gibt:

$$V'U''' + U'V''' = 0 , \tag{22}$$

also für $U' \neq 0$, $V' \neq 0$:

$$\begin{cases} U''' = kU' , & U'' = kU'' + l_1 , \\ V''' = -kV' , & V'' = -kV'' + l_2 . \end{cases} \tag{23}$$

Setzen wir diese Werte in (21) ein, so erhalten wir:

$$\begin{cases} U'^2 = kU^2 + (l_1 + l_2)U - m , \\ V'^2 = kV^2 + (l_1 + l_2)V + m . \end{cases} \tag{24}$$

Aus (23) folgt aber:

$$l_1 = l_2 = l .$$

Ist $k = -a^2 \neq 0$, so kommt aus (24):

$$\begin{cases} U = a_1 \cos(au) + a_2 , \\ V = a_1 \cos(aiv) - a_2 . \end{cases} \tag{25}$$

Man kann nun $a_2 = 0$ setzen, da sich in (17) nichts ändert, wenn man $U+V$ durch $U+a_2+V-a_2$ ersetzt. Aus (20) ergibt sich dann:

$$\begin{cases} F = c_1 \operatorname{cotg} \frac{a}{2}(u + iv) , \\ \Phi = c_2 \operatorname{cotg} \frac{a}{2}(u - iv) . \end{cases} \tag{26}$$

Die Realität von x und y verlangt:

$$c_2 = \overline{c_1} ,$$

wo $\overline{c_1}$ den zu c_1 konjugiert imaginären Wert darstellt. Somit erhalten wir schliesslich:

$$\begin{cases} x = 2i \dfrac{-a \sin(aiv) + ib \sin(au)}{\cos(au) - \cos(aiv)} , \\ y = 2 \dfrac{-a \sin(au) + ib \sin(aiv)}{\cos(au) - \cos(aiv)} , \end{cases} \tag{27}$$

wo a, b, a willkürliche reelle Zahlen bedeuten. Die Elimination von v bzw. u ergibt:

$$\begin{cases} (a^2+b^2)(x^2+y^2) - 4(a^2-b^2)^2 = 4(a^2-b^2)(bx+ay)\operatorname{cotg}(au), \\ (a^2+b^2)(x^2+y^2) + 4(a^2-b^2)^2 = 4i(b^2-a^2)(ax-by)\operatorname{cotg}(aiv). \end{cases} \tag{28}$$

Wird $k = 0$, so kommt aus (24):

$$(29) \qquad \begin{cases} 2lU = l^2u^2 + m, \\ 2lV = l^2v^2 - m; \end{cases}$$

man kann wieder $m = 0$ setzen und erhält aus (2):

$$(30) \qquad F = \frac{c_1}{u+iv}, \quad \Phi = \frac{c_2}{u+iv}$$

mit: $c_2 = \bar{c}_1$.

Für x, y findet man schliesslich:

$$(31) \qquad \begin{cases} x = 2\dfrac{bu - av}{u^2+v^2}, \\ y = 2\dfrac{au + bv}{u^2+v^2}; \end{cases}$$

dabei bedeuten a, b reelle Konstante. Die Kreise der beiden Scharen sind bestimmt durch:

$$(32) \qquad \begin{cases} u(x^2+y^2) = 2(bx + ay), \\ v(x^2+y^2) = 2(by - ax). \end{cases}$$

Wird endlich angenommen, dass:

$$(33) \qquad U' = 0, \quad U = a,$$

so ist (22) für jedes V erfüllt; aus (21) kommt aber zur Bestimmung von V:

$$(V+a)V'' - V'^2 = 0,$$

also:

$$(34) \qquad V = c_1 e^{av} - a.$$

Ferner findet man aus (20):

$$(34) \qquad F = c_2 e^{i\alpha(u+iv)}, \quad \Phi = c_3 e^{-i\alpha(u-iv)}$$

mit: $c_3 = \bar{c}_2$;

so ergibt sich schliesslich:

$$(36) \qquad \begin{cases} x = 2(m\sin(\alpha u) + n\cos(\alpha u))e^{-\alpha v}, \\ y = 2(m\cos(\alpha u) - n\sin(\alpha u))e^{-\alpha v}, \end{cases}$$

wo m, n, α reelle Zahlen bedeuten. In diesem Falle erhält man also eine Schar konzentrischer Kreise und das Geradenbüschel durch den Mittelpunkt der Kreisschar.

Aus (28) und (32) folgt:

Zwei Scharen von Kreisen bilden ein isometrisches Netz dann und nur dann, wenn sie entweder ein elliptisches und hyperbolisches Büschel oder zwei durch denselben Punkt gehende parabolische Büschel mit zueinander senkrechten Achsen bilden.

Es mag bemerkt werden, dass man die isogonalen Kreisnetze auch leicht direkt bestimmen kann durch den Ansatz:

$$(37)\qquad \begin{cases} x = U_1 + U_3\cos\varphi\,, & y = U_2 + U_3\sin\varphi\,, \\ x = V_1 + V_3\cos\psi\,, & y = V_2 + V_3\sin\psi\,, \end{cases}$$

wo:

$$(38)\qquad \varphi - \psi = \vartheta\,.$$

Indes wollen wir von der Ausführung der Rechnung, die keine Schwierigkeiten bietet, absehen.

§ 3.

Die Flächen konstanten Krümmumgsmasses für $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$.

1. Handelt es sich um die *Kugel*, so müssen nach (8) $\varkappa \neq 0$, $\gamma \neq 0$ sein; setzen wir $\varkappa = 1$ und $\alpha = \beta = 0$, so erhalten wir nach (10) und (12):

$$(39)\qquad ds^2 = \frac{1}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \gamma)^2}(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)\,.$$

Sei die Kugel gegeben durch:

$$(40)\qquad x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi\,,\quad z = f(r)\,;$$

dann muss sein:

$$(41)\qquad \begin{cases} (1+f'(r)^2)\,r_{\bar{u}}^2 + r^2\varphi_{\bar{u}}^2 = \dfrac{1}{(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\gamma)^2}\,, \\ (1+f'(r)^2)\,r_{\bar{v}}^2 + r^2\varphi_{\bar{v}}^2 = \dfrac{1}{(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\gamma)^2}\,, \\ (1+f'(r)^2)\,r_{\bar{u}}r_{\bar{v}} + r^2\varphi_{\bar{u}}\varphi_{\bar{v}} = 0\,. \end{cases}$$

Die beiden ersten Gleichungen sind erfüllt durch den Ansatz:

$$(42)\qquad \begin{cases} r\varphi_{\bar{u}} = \dfrac{1}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+\gamma}\cos\psi\,, \quad r\varphi_{\bar{v}} = \dfrac{1}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+\gamma}\cos\chi\,, \\ \sqrt{1+f'(r)^2}\,r_{\bar{u}} = \dfrac{1}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+\gamma}\sin\psi\,, \\ \sqrt{1+f'(r)^2}\,r_{\bar{v}} = \dfrac{1}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+\gamma}\sin\chi\,; \end{cases}$$

aus der dritten kommt:

$$\cos(\chi - \psi) = 0\,,$$

also:

$$\chi = \psi + \frac{\pi}{2}\,.$$

Aus (42) ergibt sich so unmittelbar:

$$(43)\qquad \begin{cases} r\varphi_{\bar{u}} = \sqrt{1+f'(r)^2}\, r_{\bar{v}}\,, \\ r\varphi_{\bar{v}} = \sqrt{1+f'(r)^2}\, r_{\bar{u}} \end{cases}$$

und die Integrabilitätsbedingung gibt für r die Differentialgleichung:

$$(44)\qquad \frac{\partial}{\partial \bar{u}}\left(\sqrt{1+f'(r)^2}\,\frac{r_{\bar{u}}}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial \bar{v}}\left(\sqrt{1+f'(r)^2}\,\frac{r_{\bar{v}}}{r}\right)=0\,.$$

Ist r hieraus bestimmt, so erhält man φ aus (43):

$$(45)\qquad \varphi=\int \frac{\sqrt{1+f'(r)^2}}{r}\,(r_{\bar{v}}\,d\bar{u}-r_{\bar{u}}\,d\bar{v})+c\,.$$

Für die Kugel mit dem Radius r_0 ist nun:

$$f(r)=\sqrt{r_0^2-r^2}\,;$$

setzen wir:

$$(46)\qquad r=r_0\sin\eta\,,$$

so kommt aus (44):

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{u}^2}\left(lg\,\mathrm{tg}\,\frac{\eta}{2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial \bar{v}^2}\left(lg\,\mathrm{tg}\,\frac{\eta}{2}\right)=0\,,$$

also:

$$\mathrm{tg}\,\frac{\eta}{2}=\mathrm{F}(\bar{u}+i\bar{v})\cdot\Phi(\bar{u}-i\bar{v})\,,$$

wo F, Φ zunächst willkürliche Funktionen von $u+iv$ bzw. $u-iv$ bedeuten. Aus (45) und (46) ergibt sich dann:

$$(47)\qquad \begin{cases} r=\dfrac{2r_0\mathrm{F}\Phi}{1+\mathrm{F}^2\Phi^2}\,, \\ \varphi=i\,lg\,\dfrac{\mathrm{F}}{\Phi}\,. \end{cases}$$

Die aus (41) und (43) folgende Gleichung

$$r^2(\varphi_{\bar{u}}^2+\varphi_{\bar{v}}^2)=\frac{1}{(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\gamma)^2}$$

gibt schliesslich die zur Bestimmung von F und Φ dienende Funktionalgleichung:

$$\frac{16\,r_0^2\mathrm{F}\mathrm{F}'\Phi\Phi'}{(1+\mathrm{F}^2\Phi^2)^2}=\frac{1}{(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\gamma)^2}\,.$$

Differentiiert man rechts und links einmal logarithmisch nach $u+iv$ und dann nach $u-iv$, so erhält man:

$$(48)\qquad \frac{4FF'}{(1+F^2\Phi^2)^2}=\frac{\gamma}{(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\gamma)^2},$$

woraus folgt:

$$(49)\qquad r_0^2=\frac{1}{4\gamma},$$

ein Wert, der mit dem aus (8) folgenden übereinstimmt.

Die Funktionalgleichung (48) lässt sich nun leicht behandeln. Da F und Φ keine konstanten Werte annehmen können, so kann man (48) in der Form schreiben:

$$(50)\qquad \frac{\bar{u}^2+\bar{v}^2+\gamma}{\sqrt{\gamma}}=\frac{1}{\sqrt{(F^2)'}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\Phi^2)'}}(1+F^2\Phi^2);$$

differentiiert man nacheinander nach $\bar{u}+i\bar{v}$ und $\bar{u}-i\bar{v}$, so erhält man[3]):

$$(51)\qquad \frac{1}{\sqrt{\gamma}}=\left(\frac{1}{\sqrt{(F^2)'}}\right)'\left(\frac{1}{\sqrt{(\Phi^2)'}}\right)'+\left(\frac{F^2}{\sqrt{(F^2)'}}\right)'\left(\frac{\Phi^2}{\sqrt{(\Phi^2)'}}\right)',$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\alpha_1F^2+\alpha_2=(\bar{u}+i\bar{v}+\alpha_3)\sqrt{(F^2)'},$$

$$\beta_1\Phi^2+\beta_2=(\bar{u}-i\bar{v}+\beta_3)\sqrt{(\Phi^2)'};$$

hier bedeuten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ Konstante, die aber nicht alle willkürlich bleiben. Die Integration dieser beiden Gleichungen führt auf die folgenden Werte:

$$(52)\qquad \begin{cases} F^2=\dfrac{a(\bar{u}+i\bar{v})+b}{k(\bar{u}+i\bar{v})+l}, \\ \Phi^2=\dfrac{\alpha(\bar{u}+i\bar{v})+\beta}{\varkappa(\bar{u}-i\bar{v})+\lambda}, \end{cases}$$

wo a, b, k, l; $\alpha, \beta, \varkappa, \lambda$ wieder Konstante bedeuten. Setzt man diese Werte in (50) ein, so erhält man die Beziehungen:

$$\sqrt{\gamma}(a\alpha+k\varkappa)=\sqrt{al-bk}\sqrt{\alpha\lambda-\beta\varkappa},$$

$$a\beta+k\lambda=0,$$

$$b\alpha+l\varkappa=0,$$

$$b\beta+l\lambda=\sqrt{\gamma}\sqrt{al-bk}\sqrt{\alpha\lambda-\beta\varkappa}$$

und somit:

$$(53)\qquad \alpha=\rho l,\quad \beta=-\gamma\rho k,\quad \varkappa=-\rho b,\quad \lambda=\gamma\rho a,$$

---

[3]) Die Rechnung würde sich etwas einfacher gestalten, wenn man (50) zuerst mit $\bar{u}-i\bar{v}$ dividiert und dann differentiiert (vgl. § 5); die hier angewandte Methode hat aber den Vorteil, dass sie keine Fallunterscheidungen verlangt.

wo nun a, b, k, l, ρ beliebige, komplexe Konstante bedeuten. Die Bedingung der Realität von r und φ führt schliesslich auf:

$$(54)\quad \begin{cases} F^2 = \sqrt{\gamma}\,\dfrac{a_1\bar{u} - a_2\bar{v} + b_1 + i(a_2\bar{u} + a_1\bar{v} + b_2)}{-b_1\bar{u} - b_2\bar{v} + a_1\gamma + i(b_2\bar{u} - b_1\bar{v} - a_2\gamma)}, \\ \Phi^2 = \sqrt{\gamma}\,\dfrac{a_1\bar{u} - a_2\bar{v} + b_1 - i(a_2\bar{u} + a_1\bar{v} + b_2)}{-b_1\bar{u} - b_2\bar{v} + a_1\gamma - i(b_2\bar{u} - b_1\bar{v} - a_2\gamma)}, \end{cases}$$

wo jetzt a_1, a_2, b_1, b_2 beliebige reelle Konstante bedeuten.

Man kann nun leicht aus (47) r und φ berechnen; aus (40) erhält man dann unter Beachtung von (12) x, y, z, ausgedrückt als Funktionen von u, v. Damit ist der Verlauf der Netzkurven vollständig bestimmt. Man zeigt nun leicht, dass die beiden Scharen des Netzes ein Büschel bilden. Berechnet man nämlich $\bar{u} + i\bar{v}$ und $\bar{u} - i\bar{v}$ aus den Gleichungen (54), so erhält man:

$$\bar{u} + i\bar{v} = \frac{\sqrt{\gamma}(\bar{a}F^2 - b)}{\bar{b}F^2 + a},$$

$$\bar{u} - i\bar{v} = \frac{\sqrt{\gamma}(a\Phi^2 - \bar{b})}{b\Phi^2 + \bar{a}},$$

wo gesetzt ist:

$$a\sqrt{\gamma} = a_1 + ia_2,\quad \bar{a}\sqrt{\gamma} = a_1 - ia_2,\quad b = b_1 + ib_2,\quad \bar{b} = b_1 - ib_2.$$

Unter Beachtung der Gleichungen (12) kommt hieraus:

$$(55)\quad \begin{cases} \dfrac{2i\sin\vartheta}{\sqrt{\gamma}}u = \dfrac{\bar{a}F^2 - b}{\bar{b}F^2 + a}e^{i\frac{\vartheta}{2}} - \dfrac{a\Phi^2 - \bar{b}}{b\Phi^2 + \bar{a}}e^{-i\frac{\vartheta}{2}}, \\ \dfrac{2i\sin\vartheta}{\sqrt{\gamma}}v = -\dfrac{\bar{a}F^2 - b}{\bar{b}F^2 + a}e^{-i\frac{\vartheta}{2}} + \dfrac{a\Phi^2 - \bar{b}}{b\Phi^2 + \bar{a}}e^{i\frac{\vartheta}{2}}. \end{cases}$$

Nun wird nach (47) und (49):

$$(56)\quad F^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\gamma r^2}}{2\sqrt{\gamma}\,r}e^{i\varphi},\quad \Phi^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\gamma r^2}}{2\sqrt{\gamma}\,r}e^{-i\varphi}.$$

Trägt man diese Werte in (55) ein, so erhält man unter Beachtung von (40);

$$\pm\frac{i\sin\vartheta}{\gamma}\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}\Big(2\gamma\big((ab + \bar{a}\bar{b})x - i(ab - \bar{a}\bar{b})y + (a\bar{a} - b\bar{b})z\big) + a\bar{a} + b\bar{b}\Big)$$

$$= \cos\frac{\vartheta}{2}\Big((\bar{a}^2 - a^2 + \bar{b}^2 - b^2)x + i(a^2 + \bar{a}^2 + b^2 + \bar{b}^2)y + 2(a\bar{b} - \bar{a}b)z\Big)$$

$$\pm i\sin\frac{\vartheta}{2}\Big((a^2 + \bar{a}^2 - b^2 - \bar{b}^2)x + i(\bar{a}^2 - a^2 + b^2 - \bar{b}^2)y - 2(a\bar{b} + \bar{a}b)z\Big),$$

wo das + Zeichen für die u- Kurven und das — Zeichen für die v- Kurven zu nehmen ist. Der Koeffizient auf der linken Seite, gleich Null gesetzt, stellt die Tangentialebene der Kugel im Punkte

$$P\Big(\frac{ab - \bar{a}\bar{b}}{2\sqrt{\gamma}(a\bar{a} + b\bar{b})},\ \frac{i(\bar{a}\bar{b} - ab)}{2\sqrt{\gamma}(a\bar{a} + b\bar{b})},\ \frac{a\bar{a} - b\bar{b}}{2\sqrt{\gamma}(a\bar{a} + b\bar{b})}\Big)$$

dar. Die Büschelachsen sind daher Tangenten der Kugel durch diesen Punkt, die, wie man leicht berechnet, den Winkel ϑ miteinander einschliessen[4]). Wir erhalten also den Satz[5]):

Zwei Scharen von Kreisen bilden auf der Kugel ein isogonales rhombisches Netz mit dem Winkel $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$, *wenn sie zwei durch denselben Punkt hindurchgehende parabolische Büschel bilden, deren Achsen den Winkel* ϑ *einschliessen.*

2. Für die *Pseudosphäre* kommt sowohl (10) wie (11) in Frage. Ist $\varkappa \neq 0$, so gehen wir wieder von (39) aus. Für

$$f(r) = r_0 \lg\frac{r_0 - \sqrt{r_0^2 - r^2}}{r} - \sqrt{r_0^2 - r^2}$$

erhält man aus (44):

$$\frac{\partial^2}{\partial\bar{u}^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\bar{v}^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0,$$

somit:

$$\frac{1}{r} = F(\bar{u} + i\bar{v}) + \Phi(\bar{u} - i\bar{v}), \tag{57}$$

---

[4]) Man kann übrigens $a=0$ setzen, was einer Drehung des Koordinatensystems gleichkommt, derart, dass die Z- Achse mit der Richtung von OP zusammenfällt.

[5]) Wir gebrauchten hier wie im folgenden die Bezeichnungen der Ebene, indem wir die Büschel als elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch bezeichnen, wenn sie bei bei der Abbildung durch die stereographische Polarprojektion oder Beltramitransformation aus elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen Kreisbüscheln der Ebene hervorgehen.

und:

$$\varphi = -i(F(\bar{u}+i\bar{v}) - \Phi(\bar{u}-i\bar{v})). \tag{58}$$

Aus (41) und (43) ergibt sich zur Bestimmung von F und Φ die Funktionalgleichung:

$$\frac{4r_0^2 F'\Phi'}{(F+\Phi)^2} = \frac{1}{(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\gamma)^2}. \tag{59}$$

Sie verlangt zunächst:

$$r_0^2 = -\frac{1}{4\gamma}; \tag{60}$$

durch die Substitution

$$F = \frac{1}{\bar{F}^2}, \quad \Phi = \bar{\Phi}^2, \tag{61}$$

geht (59) in die Form der Gleichung (48) über. Somit erhalten wir nach (52) und (53):

$$F = \frac{k(\bar{u}+i\bar{v})+l}{a(\bar{u}+i\bar{v})+b}, \quad \Phi = \frac{l(\bar{u}-i\bar{v})-k\gamma}{-b(\bar{u}-i\bar{v})+a\gamma}.$$

Die Realität von r und φ führt schliesslich auf die Form:

$$F = \sigma\frac{\bar{u}+i\bar{v}+\sqrt{-\gamma}}{\bar{u}+i\bar{v}-\sqrt{-\gamma}}, \quad \Phi = \bar{\sigma}\frac{\bar{u}-i\bar{v}+\sqrt{-\gamma}}{\bar{u}-i\bar{v}-\sqrt{-\gamma}}, \tag{62}$$

wo σ und $\bar{\sigma}$ zueinander konjugiert imaginär sind. Durch (57) und (58) sind nun r und φ bestimmt und man erhält unter Beachtung von (12) leicht x, y, z als Funktionen von u, v, womit der Verlauf der Netzkurven bestimmt ist. In der gleichen Weise wie im Falle der Kugel ergeben sich die die beiden Scharen bestimmenden Gleichungen:

$$\sin\vartheta\left\{\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\left(\left(\frac{1}{2r}-\alpha\right)^2+\left(\frac{\varphi}{2}-\beta\right)^2\right)\right\}$$

$$= \sqrt{-\gamma}\sin\frac{\vartheta}{2}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r^2}+\varphi^2\right) \pm \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}\left(\frac{\beta}{r}-\alpha\varphi\right) - \alpha^2-\beta^2\right),$$

wo $\sigma = \alpha + i\beta$ gesetzt ist und das + Zeichen für die u- Kurven, das — Zeichen für die v- Kurven zu nehmen ist. Hieraus erkennt man leicht, dass die beiden Scharen zwei Büschel durch den gemeinsamen Punkt $r = \frac{1}{2\alpha}$, $\varphi = 2\beta$ bilden, deren Achsen Tangenten der Pseudosphäre sind und den Winkel ϑ einschliessen.

Ist $\varkappa = 0$ [6]), so lässt sich (11) in die Form überführen:

$$ds^2 = \frac{1}{(a\bar{u} + b\bar{v} + \gamma)^2}(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2), \tag{63}$$

wo ist:

$$\begin{cases} \bar{u} = (u+v)\cos\dfrac{\vartheta}{2}, & \bar{v} = (u-v)\sin\dfrac{\vartheta}{2}, \\ a = (\alpha+\beta)\cos\dfrac{\vartheta}{2}, & b = (\alpha-\beta)\sin\dfrac{\vartheta}{2}. \end{cases} \tag{64}$$

An die Stelle der Funktionalgleichung (59) tritt dann die folgende:

$$\frac{4r_0^2 F'\Phi'}{(F+\Phi)^2} = \frac{1}{(a\bar{u} + b\bar{v} + \gamma)^2}. \tag{65}$$

Hieraus folgt zunächst:

$$r_0^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}. \tag{66}$$

Schreibt man (65) in der Form:

$$\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{1}{\sqrt{F'}}\,\frac{1}{\sqrt{\Phi'}}(F+\Phi) = 2(a\bar{u} + b\bar{v} + \gamma), \tag{67}$$

so erhält man durch Differentiation nach $\bar{u} + i\bar{v}$ und $\bar{u} - i\bar{v}$:

$$\left(\frac{F}{\sqrt{F'}}\right)'\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi'}}\right)' + \left(\frac{\Phi}{\sqrt{\Phi'}}\right)'\left(\frac{1}{\sqrt{F'}}\right)' = 0. \tag{68}$$

Unter der Annahme, dass F' und Φ' nicht konstant sind, kommt hieraus:

$$\left(\frac{F}{\sqrt{F'}}\right)' = k\left(\frac{1}{\sqrt{F'}}\right)', \quad \left(\frac{\Phi}{\sqrt{\Phi'}}\right)' = -k\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi'}}\right)';$$

somit durch Integration:

$$F = k + \frac{m_1}{\bar{u} + i\bar{v} + n_1},$$

$$\Phi = -k + \frac{m_2}{\bar{u} + i\bar{v} + n_2}.$$

Setzt man diese Werte in (67) ein, so ergeben sich für die Konstanten die Werte:

$$m_1 = \lambda(a + ib), \quad m_2 = \lambda(a - ib),$$
$$(a+ib)n_1 + (a-ib)n_2 = \gamma.$$

---

[6]) In diesem Falle haben die Kurven einer Schar je dieselbe konstante geodätische Krümmung und man hat den von H. *A. Voss* betrachteten Fall, worauf in § 1 hingewiesen wurde.

Die Realität von r und φ erfordert ausserdem, das λ reell, k rein imaginär und n_2 zu n_1 konjugiert imaginär sind. Somit kommt schliesslich:

$$\begin{cases} F = ix + \dfrac{\lambda(a-ib)}{\bar{u}+i\bar{v}+\lambda\left(\dfrac{\gamma}{2(a+ib)}+i(a-ib)c\right)}, \\ \Phi = -ix + \dfrac{\lambda(a+ib)}{\bar{u}-i\bar{v}+\lambda\left(\dfrac{\gamma}{2(a-ib)}-i(a+ib)c\right)}, \end{cases}$$

wo c, $\varkappa$, λ beliebige reelle Zahlen bedeuten. Aus (57) und (58) kann man wieder r, φ berechnen und man erkennt in der gleichen Weise wie oben, dass die Netzkurven zwei parabolische Büschel durch den Punkt $\left(\frac{1}{r}=0,\ \varphi=2\varkappa\right)$ bilden, deren Achsen den Winkel ϑ einschliessen.

Wird angenommen, dass:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{F'}}\right)' = 0, \tag{70}$$

so folgt aus (68) entweder:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi'}}\right)' = 0,$$

oder:

$$\left(\frac{F}{\sqrt{F'}}\right)' = 0.$$

Die letztere Möglichkeit scheidet aber aus, da sie auf $F = \text{const.}$ führen würde. Im ersten Falle ergibt die Rechnung leicht:

$$F = \frac{a-ib}{\lambda(a^2+b^2)}(\bar{u}+i\bar{v}) + \frac{\gamma}{2\lambda(a^2+b^2)} + ic,$$

$$\Phi = \frac{a+ib}{\lambda(a^2+b^2)}(\bar{u}-i\bar{v}) + \frac{\gamma}{2\lambda(a^2+b^2)} - ic,$$

wo c, λ reelle Konstante bedeuten. Auch in diesem Falle bilden die Netzkurven zwei parabolische Büschel durch den Punkt $(r=0,\ \varphi=\infty)$, deren Achsen wieder den Winkel ϑ einschliessen.

Aus dem vorhergehenden folgt:

Zwei Scharen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung bilden auf der Pseudosphäre ein isogonales rhombisches

Netz mit dem Winkel $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$ *dann und nur dann, wenn sie zwei parabolische Büschel durch denselben Punkt bilden, deren Achsen den Winkel* ϑ *einschliessen. Die Flächen negativer konstanter Krümmung sind die einzigen Flächen, auf denen solche Netze existieren derart, dass alle Kurven der einen wie der andern Schar je dieselbe konstante geodätische Krümmung haben.*

§ 4.

Die Rotationsflächen mit orthogonalen rhombischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung.

Die bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, dass die Flächen konstanten Krümmungsmasses die einzigen Flächen sind, auf denen zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung ein nichtisometrisches isogonales rhombisches Netz bilden können. Wird aber $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so gilt diese Ausnahmestellung der Flächen konstanten Krümmungsmasses nicht mehr. Denn die Gesamtheit aller Flächen mit isometrischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung ist durch (9) bestimmt und man erkennt leicht, dass das Krümmungsmass dieser Flächen im allgemeinen nicht konstant zu sein braucht. Indes lässt sich zeigen:

Die sphärischen und pseudosphärischen Rotationsflächen sind die einzigen Rotationsflächen mit isometrischen Netzen aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung.

Zum Beweise schreiben wir das Quadrat des Bogenelementes in der Form:

$$(72) \qquad ds^2 = \frac{1}{(U+V)^2}(du^2+dv^2);$$

eine beliebige Rotationsfläche denken wir uns in der Form (40) gegeben. In der gleichen Weise wie in § 3 — man hat nur $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{u}^2+\bar{v}^2+\gamma$ bzw. durch u, v, $U+V$ zu ersetzen — erhalten wir die (43) und (44) entsprechenden Gleichungen:

$$(73) \qquad \begin{cases} r\varphi_u = \sqrt{1+f'(r)^2}\, r_v, \\ r\varphi_v = \sqrt{1+f'(r)^2}\, r_u; \end{cases}$$

$$(74)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{1+f'(r)^2}\,\frac{r_u}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{1+f'(r)^2}\,\frac{r_v}{r}\right)=0\,.$$

Setzen wir:

$$(75)\quad \chi'(r)=\frac{\sqrt{1+f'(r)^2}}{r}\,,$$

so kommt aus (74):

$$(76)\quad \frac{\partial^2}{\partial u^2}\chi(r)+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\chi(r)=0\,,$$

somit:

$$(77)\quad \chi(r)=\mathrm{F}(u+iv)+\Phi(u-iv)\,,$$

und aus (73):

$$(78)\quad \varphi=i(\mathrm{F}-\Phi)+\gamma\,.$$

Aus (73) und den (41) entsprechenden Gleichungen kommt schliesslich:

$$(79)\quad r^2(\varphi_u{}^2+\varphi_v{}^2)=\frac{1}{(U+V)^2}\,.$$

Hieraus und aus (78) ergibt sich die Funktionalgleichung:

$$(80)\quad 4r^2\mathrm{F}'\Phi'=\frac{1}{(U+V)^2}\,,$$

wo r nach (77) als Funktion von $\mathrm{F}+\Phi$ anzusehen ist. Durch logarithmische Differentiation nach u bzw. v findet man:

$$(81)\quad \begin{cases} 2(\mathrm{F}'+\Phi')\dfrac{r'}{r}+\dfrac{\mathrm{F}''}{\mathrm{F}'}+\dfrac{\Phi''}{\Phi'}=-\dfrac{2U'}{U+V}\,, \\ 2(\mathrm{F}'-\Phi')\dfrac{r'}{r}+\dfrac{\mathrm{F}''}{\mathrm{F}'}-\dfrac{\Phi''}{\Phi'}=\quad\dfrac{2iV}{U+V}\,; \end{cases}$$

die Elimination von $\dfrac{r'}{r}$ gibt dann:

$$(82)\quad (U+V)(A'-B')=U'(A-B)-iV'(A+B)\,,$$

wo gesetzt ist:

$$(83)\quad A=\frac{1}{\mathrm{F}'}\,,\qquad B=\frac{1}{\Phi'}\,.$$

Setzt man:

$$(84)\quad d\bar{u}=\frac{du}{U^2}\,,\quad id\bar{v}=\frac{dv}{V^2}\,,$$

so kann man (82) in der Form schreiben:

$$(85)\quad \frac{\partial}{\partial\bar{u}}\left(\frac{A-B}{U}\right)-\frac{\partial}{\partial\bar{v}}\left(\frac{A+B}{V}\right)=0\,.$$

Diese Gleichung ist erfüllt für:

$$(86)\qquad \begin{aligned} A-B&=U\phi_{\bar v}\,,\\ A+B&=V\phi_{\bar u}\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Differentiation[7]):

$$A'-B'=\quad U'\phi_{\bar v}+\frac{\phi_{\bar v\,\bar u}}{U}\,,\qquad A'+B'=-\frac{U\phi_{\bar v\,\bar v}}{V^2}\,,$$

$$A'-B'=-iV'\phi_{\bar u}-\frac{\phi_{\bar u\,\bar v}}{V}\,,\qquad A'+B'=\quad\frac{V\phi_{\bar u\,\bar u}}{U^2}\,,$$

und hieraus:

$$(87)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{U}+\dfrac{1}{V}\right)\phi_{\bar u\,\bar v}+iV'\phi_{\bar u}+U'\phi_{\bar v}=0\,,\\ V^3\phi_{\bar u\,\bar u}+U^3\phi_{\bar v\,\bar v}=0\,. \end{cases}$$

Diese beiden Bedingungen sind notwendig und hinreichend, dass A, B Funktionen nur von $u+iv$ bzw. $u-iv$ sind.

Die erste Gleichung (84) stellt eine Laplacesche Gleichung dar, die sich integrieren lässt. Schreiben wir sie in der Form:

$$\phi_{\bar u\,\bar v}+a\phi_{\bar u}+b\phi_{\bar v}=0\,,$$

so wird:

$$a=\frac{iV'}{U^{-1}+V^{-1}}\,,\qquad b=\frac{U'}{U^{-1}+V^{-1}}\,.$$

Ihre ersten Invarianten sind:

$$I_1=I_2=-\frac{2iU'V'}{(U^{-1}+V^{-1})^2}\,.$$

Machen wir nun die Substitution:

$$(89)\qquad \zeta=a\phi+\frac{\partial\phi}{\partial\bar v}\,,$$

und setzen zur Abkürzung:

$$\bar U=\frac{1}{U}\,,\qquad \bar V=\frac{1}{V}\,,$$

so geht (81) über in:

$$\zeta_{\bar u\,\bar v}+a_1\zeta_{\bar u}+b_1\zeta_{\bar v}+c_1=0\,,$$

---

[7]) Die Striche bedeuten Differentiationen nach den Argumenten u, v, $u+iv$ oder $u-iv$.

wo ist[8]):

$$a_1 = a - \frac{\partial}{\partial \bar{v}}(\lg I_1) = \frac{\bar{V}'}{\bar{U}+\bar{V}} - \frac{\bar{V}''}{\bar{V}'},$$

$$b_1 = b, \qquad c_1 = -b\frac{\partial}{\partial \bar{v}}(\lg I_1).$$

Da nun eine Invariante verschwindet, so kann man sofort integrieren. Man findet:

$$\zeta = (\bar{U}+\bar{V})\frac{d^2 V_1}{d\bar{V}^2} - 2\frac{dV_1}{d\bar{V}} + \frac{2V'(U_1+V_1)}{\bar{U}+\bar{V}},$$

wo U_1, V_1 willkürliche Funktionen von $\bar{u}$ bzw. $\bar{v}$ bedeuten. Für ϕ erhält man dann aus (88) und (89):

$$(90) \qquad \phi = (\bar{U}+\bar{V})\left(\frac{dU_1}{d\bar{U}} + \frac{dV_1}{d\bar{V}}\right) - 2(U_1+V_1).$$

Setzt man diesen Wert in die zweite Gleichung (87) ein, so ergibt sich die Funktionalgleichung:

$$(91) \quad \bar{U}^3\left(\left(\bar{U}\frac{dU_1}{d\bar{U}}\right)'' + \bar{V}\left(\frac{dU_1}{d\bar{U}}\right)'' + U''\frac{dV_1}{d\bar{V}} - 2U_1''\right)$$
$$+ \bar{V}^3\left(\left(\bar{V}\frac{dV_1}{d\bar{V}}\right)'' + \bar{U}\left(\frac{dV_1}{d\bar{V}}\right)'' + \bar{V}''\frac{dU_1}{d\bar{U}} - 2V_1''\right) = 0.$$

Durch Differentiation nach $\bar{U}$ und $\bar{V}$ kommt hieraus:

$$(92) \quad \frac{d}{d\bar{U}}\left(\bar{U}^3\left(\frac{dU_1}{d\bar{U}}\right)''\right) + \frac{d}{d\bar{V}}\left(\bar{V}^3\left(\frac{dV_1}{d\bar{V}}\right)''\right)$$
$$+ \frac{d}{d\bar{U}}(\bar{U}^3\bar{U}'')\frac{d^2V_1}{d\bar{V}^2} + \frac{d}{d\bar{V}}(\bar{V}^3\bar{V}'')\frac{d^2U_1}{d\bar{U}^2} = 0,$$

$$(93) \quad \frac{d^2}{d\bar{U}^2}(\bar{U}^3\bar{U}'')\frac{d^3V_1}{d\bar{V}^3} + \frac{d^2}{d\bar{V}^2}(\bar{V}^3\bar{V}'')\frac{d^3U_1}{d\bar{U}^3} = 0.$$

Aus (93) folgt für $\frac{d^2}{d\bar{U}^2}(\bar{U}^3\bar{U}'') \neq 0$, $\frac{d^2}{d\bar{V}^2}(\bar{V}^3\bar{V}'') \neq 0$:

$$(94) \quad \begin{cases} \dfrac{dU_1}{d\bar{U}} = -k\bar{U}^3\bar{U}'' + a_1\bar{U} + a_2, \\ \dfrac{dV_1}{d\bar{V}} = \quad k\bar{V}^3\bar{V}'' + b_1\bar{V} + b_2. \end{cases}$$

[8]) Die Striche bei U, V bedeuten jetzt Differentiationen nach $\bar{u}$ bzw. $\bar{v}$.

Aus (92) kommt dann:

$$(95)\qquad \begin{cases} \left(\frac{dU_1}{d\overline{U}}\right)'' + b_1\overline{U}'' = \frac{l}{\overline{U}^2} + \frac{a_3}{\overline{U}^3}\,, \\ \left(\frac{dV_1}{d\overline{V}}\right)'' + a_1\overline{V}'' = -\frac{l}{\overline{V}^2} + \frac{b_3}{\overline{V}^2}\,; \end{cases}$$

endlich aus (91):

$$(96)\qquad \begin{cases} \left(\overline{U}\frac{dU_1}{d\overline{U}}\right)'' - 2U_1'' + b_2\overline{U}'' = -\frac{b_3}{\overline{U}^2} + \frac{m}{\overline{U}^3}\,, \\ \left(\overline{V}\frac{dV_1}{d\overline{V}}\right)'' - 2V_1'' + a_2\overline{V}'' = -\frac{a_3}{\overline{V}^2} - \frac{m}{\overline{V}^3}\,. \end{cases}$$

Setzt man für $\frac{dU_1}{d\overline{U}}$ seinen Wert aus (94) in die erste Gleichung von (95) und (96) ein, so erhält man:

$$(97)\qquad \begin{cases} k(\overline{U}^4\overline{U}'''' + 6\overline{U}^3\overline{U}'\overline{U}''' + 6\overline{U}^2\overline{U}'^2\overline{U}'' + 2\overline{U}^3\overline{U}'^2) \\ \qquad + (b_2 - a_2)\overline{U}'' + \frac{b_3}{\overline{U}^2} - \frac{m}{\overline{U}^3} = 0\,, \\ k(\overline{U}^3\overline{U}'''' + 6\overline{U}^3\overline{U}'\overline{U}''' + 6\overline{U}\,\overline{U}'^2\overline{U}'' + 2\overline{U}^2\overline{U}''^2) \\ \qquad + (a_1 + b_1)\overline{U}'' - \frac{l}{\overline{U}^2} - \frac{a_3}{\overline{U}^3} = 0\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$(98)\qquad k\overline{U}^3\overline{U}'' + ((a_1 + b_1)\overline{U} + a_2 - b_2)\,\overline{U}'' - \frac{l}{\overline{U}} - \frac{a_3 + b_3}{\overline{U}^2} + \frac{m}{\overline{U}^3} = 0\,.$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt für:

$$k = 0,\ a_1 + b_1 = 0\ \ a_2 - b_2 = 0,\ a_3 + b_3 = 0,\ l = 0,\ m = 0\,.$$

Aus (97) folgt dann, dass auch sein muss:

$$a_3 = b_3 = 0\,.$$

Führt man die analoge Rechnung für V_1 und $\overline{V}$ durch, so vertauschen sich die a_i mit den b_i, während k, l, m in $-k$, $-l$, $-m$ übergehen. Es ist dann also auch die (98) entsprechende Gleichung für $\overline{V}$ identisch erfüllt. Somit kommt in diesem Falle:

$$\frac{dU_1}{d\overline{U}} = a_1\overline{U} + a_2\,,\quad \frac{dV_1}{d\overline{V}} = -a_1\overline{V} + a_2\,,$$

oder:

$$U_1 = \frac{a_1}{2}\overline{U}^2 + a_2\overline{U} + c_1, \quad V_1 = -\frac{a_2}{2}\overline{V}^2 + a_1\overline{V} + c_2$$

Setzt man diese Werte in (90) ein, so erhält man:

$$\psi = -2(c_1 + c_2);$$

dies führt nach (87) auf:

$$A = B = 0,$$

was aber sinnlos ist; daher ist die Annahme, dass (98) identisch erfüllt sei, unzulässig.

Wird nun $k \neq 0$ angenommen, so erhält man aus (98) eine Beziehung von der Form:

$$\overline{U}^3\overline{U}'' = a\overline{U} + b + \sqrt{c\overline{U}^2 + 2d\overline{U} + e}. \tag{99}$$

Wird vorausgezetzt, dass $d^2 - ec \neq 0$, so kommt hieraus durch Integration:

$$\overline{U}'^2 = -\frac{2a}{\overline{U}} - \frac{b}{\overline{U}} + g(\overline{U}), \tag{100}$$

wo $g(\overline{U})$ entweder logarithmische oder zyklometrische Funktionen enthält, oder, falls $c = e = 0$ ist, eine Quadratwurzel. Trägt man die Werte aus (99) und (100) in eine der beiden Gleichungen (97) ein, so erkennt man leicht, dass die Bedingung des Verschwindens der Irrationalität $k = 0$ verlangen würde. Wird aber $d^2 - ec = 0$ angenommen, so kommt aus (99) eine Gleichung von der Form:

$$\overline{U}^3\overline{U}'' = \alpha\overline{U} + \beta;$$

in diesem Falle würde aber die oben gemachte Vorraussetzung, dass $\frac{d^2}{d\overline{U}^2}(\overline{U}^3\overline{U}'') \neq 0$, hinfällig. Wir kommen also in jedem Falle auf einen Widerspruch. Es muss also $k = 0$ sein.

Wird nun $k = 0$ gesetzt, so wird nach (94):

$$\frac{dU_1}{d\overline{U}} = a_1\overline{U} + a_2, \quad \frac{dV_1}{d\overline{V}} = b_1\overline{V} + b_2 \tag{101}$$

und aus (97) und den analogen Gleichungen für V kommt:

$$(102)\begin{cases}(a_1 + b_1)\overline{U}^3\overline{U}'' = l\overline{U} + a_3, (a_2 - b_2)\overline{U}^3\overline{U}'' = b_3\overline{U} + m, \\ (a_1 + b_1)\overline{V}^3\overline{V}'' = -l\overline{V} + b_3, (a_2 - b_2)\overline{V}^3\overline{V}'' = -a_3\overline{V} - m.\end{cases}$$

Es verschwinden also in diesem Falle gleichzeitig $\frac{d^2}{d\overline{U}^2}(\overline{U}^3\overline{U}'')$ und $\frac{d^2}{d\overline{V}^3}(\overline{V}^3\overline{V}'')$, was wir aber oben ausgeschlossen haben.

Aus dem vorhergehenden folgt, dass die Annahme

$$\frac{d^2}{d\overline{U}^2}(\overline{U}^3\overline{U}'')\neq 0, \quad \frac{d^2}{d\overline{V}^2}(\overline{V}^3\overline{V}'')\neq 0$$

zu einem Widerspruch führt. Ist nun gleichzeitig:

$$\frac{d^2}{d\overline{U}^2}(\overline{U}^3\overline{U}'')=0, \quad \frac{d^2}{d\overline{V}^2}(\overline{V}^3\overline{V}'')=0,$$

somit:

$$(103)\qquad \begin{cases} \overline{U}^3\overline{U}''=a_1\overline{U}+a_2, \\ \overline{V}^3\overline{V}''=b_1\overline{V}+b_2, \end{cases}$$

so ist (93) erfüllt. Aus (92) kommt dann:

$$(104)\qquad \begin{cases} \overline{U}^3\left(\frac{dU_1}{d\overline{U}}\right)''+b_1\frac{dU_1}{d\overline{U}}= \quad c\overline{U}+d_1, \\ \overline{V}^3\left(\frac{dV_1}{d\overline{V}}\right)''+a_1\frac{dV_1}{d\overline{V}}=-c\overline{V}+d_2; \end{cases}$$

aus (91):

$$(105)\qquad \begin{cases} \overline{U}^3\left(\left(\overline{U}\frac{dU_1}{d\overline{U}}\right)''-2U_1''\right)+b_2\frac{dU_1}{d\overline{U}}+d_2\overline{U}= \quad \alpha, \\ \overline{V}^3\left(\left(\overline{V}\frac{dV_1}{d\overline{V}}\right)''-2V_1''\right)+a_2\frac{dV_1}{d\overline{V}}+d_1\overline{V}=-\alpha. \end{cases}$$

Nun wird:

$$\left(\overline{U}\frac{dU_1}{d\overline{U}}\right)''-2U_1''=\overline{U}\left(\frac{dU_1}{d\overline{U}}\right)''-\overline{U}''\frac{dU_1}{d\overline{U}},$$

also kommt aus (105):

$$(106)\qquad \overline{U}^3\left(\overline{U}\left(\frac{dU_1}{d\overline{U}}\right)''-\overline{U}''\frac{dU_1}{d\overline{U}}\right)+b_2\frac{dU_1}{d\overline{U}}+d_2\overline{U}=\alpha.$$

Hieraus und aus der ersten Gleichung (104) findet man:

$$(107)\qquad \frac{dU_1}{d\overline{U}}=\frac{c\overline{U}^2+(d_1+d_2)\overline{U}-\alpha}{(a_1+b_1)\overline{U}+a_2-b_2}.$$

Setzt man diesen Wert in (104) ein, so erkennt man unter Beachtung von (103) leicht, dass entweder sein muss:

$$(108)\qquad a_1+b_1=0, \quad a_2-b_2=0, \quad d_1+d_2=0, \quad c=0, \quad \alpha=0,$$

d. h. (107) muss identisch erfüllt sein, oder sich auf die Form zurückführen lassen:

$$\frac{dU_1}{d\overline{U}} = k\,\overline{U} + l\,. \tag{109}$$

Im ersten Falle ist auch die (107) entsprechende Gleichung für V_1 identisch erfüllt; im zweiten Falle erhält man für V_1 eine Beziehung von der Form:

$$\frac{dV_1}{d\overline{V}} = m\,\overline{V} + n\,, \tag{110}$$

wo entweder

$$m = -k\,,\quad n = l \tag{111}$$

oder

$$a_1 = b_1 = 0\,,\quad a_2 = b_2\,,\quad m = k \tag{112}$$

sein muss. Sowohl im Falle (108) wie im Falle (112) wird das Krümmungsmass der entsprechenden Rotationsflächen konstant; der Fall (111) führt auf $\phi = \text{const.}$, was aber, wie schon erwähnt, sinnlos ist[9]).

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, wo gleichzeitig ist:

$$\frac{d^2}{d\overline{U}^2}(\overline{U}^3\,\overline{U}'') = 0\,,\quad \frac{d^3U_1}{d\overline{U}^3} = 0\,.$$

Es wird dann:

$$\overline{U}^3\,\overline{U}'' = a_1\,\overline{U} + a_2\,,\quad \frac{d^2U_1}{d\overline{U}^2} = a_1\,, \tag{113}$$

und aus (91) kommt:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\overline{U}}\left(\overline{U}^3\left(\frac{dU_1}{d\overline{U}}\right)''\right) = \gamma\,,\quad \overline{U}^3\left(\frac{dU_1}{d\overline{U}}\right)'' = \gamma\,\overline{U} + \delta_1\,;\\ &\frac{d}{d\overline{V}}\left(\overline{V}^3\left(\frac{dV_1}{d\overline{V}}\right)''\right) + a_1\frac{d^2V_1}{d\overline{V}^2} + a_1\frac{d}{d\overline{V}}(\overline{V}^3\,\overline{V}'') = -\gamma\,,\\ &\overline{V}^3\left(\left(\frac{dV_1}{d\overline{V}}\right)'' + a_1\,\overline{V}''\right) + \frac{dV_1}{dV} = -\gamma\,\overline{V} + \delta_2\,. \end{aligned}\right. \tag{114}$$

Die zweite dieser Gleichungen ist mit den Gleichungen (113) verträglich, wenn ist:

$$\gamma = a_1\,a_1\,,\quad \delta_1 = a_2\,a_1\,. \tag{115}$$

---

[9]) Es bietet keine Schwierigkeit, im Falle (108) U_1 und V_1 aus (109) zu bestimmen; indes kann man von den etwas weitläufigen Rechnungen absehen, da es genügt, sich auf die Kugel und Pseudosphäre zu beschränken.

Setzt man die Werte aus (113) und (114) in (91) ein, so erhält man:

$$(116)\quad \begin{cases} \overline{V}^3\left(\left(\frac{dV_1}{d\overline{V}}\right)''+a_1\overline{V}''\right)+a_1\left(\frac{dV_1}{d\overline{V}}+a_1\overline{V}-a_2\right)=0, \\ \overline{V}^3\left(\left(\overline{V}\frac{dV_1}{d\overline{V}}\right)''-2V''_1+a_2\overline{V}''\right)+a_2\frac{dV_1}{d\overline{V}}+a_2(a_1\overline{V}-a_2)=0. \end{cases}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen stimmt mit der letzten Gleichung (114) überein, wenn ist:

$$(117)\qquad \delta_2=a_1a_2.$$

Multipliziert man ferner die erste mit V_1, subtrahiert die zweite und beachtet, dass ist:

$$\left(\overline{V}\frac{dV_1}{d\overline{V}}\right)''-2V_1''=\overline{V}\left(\frac{dV_1}{d\overline{V}}\right)''-\overline{V}''\frac{dV_1}{d\overline{V}},$$

se erhält man:

$$\left(\overline{V}^3\overline{V}''+a_1\overline{V}-a_2\right)\left(\frac{dV_1}{d\overline{V}}+a_1\overline{V}-a_2\right)=0.$$

Wird:

$$\frac{dV_1}{d\overline{V}}+a_1\overline{V}-a_2=0,$$

so sind die beiden Gleichungen (116) für jedes $\overline{V}$ erfüllt; es wird aber dann, wie wir schon früher gesehen haben, ψ einen konstanten Wert erhalten, was keinen Sinn hat.

Wird aber:

$$(118)\qquad \overline{V}^3\overline{V}''+a_1\overline{V}-a_2=0,$$

so kann man zunächst $a_1=0$ setzen, da, wie man leicht erkennt, damit $U+V$ in $U-a+V+a$ übergeführt wird, sich also nichts ändert. Aus der ersten Gleichung (116) ergibt sich dann:

$$\left(\frac{dV_1}{d\overline{V}}\right)''+a_1\overline{V}''=0,$$

somit:

$$(119)\qquad \frac{dV_1}{d\overline{V}}=-a_1\overline{V}+m\overline{v}+n.$$

Aus (113) und (118) folgt wieder, dass auch in diesem Falle die entsprechenden Rotationsflächen konstantes Krümmungsmass haben. Damit ist unsere Behauptung bewiesen[10].

[10]) Es bietet keine Schwierigkeit, die Rechnungen jeweils bis zur Bestimmung von $f(r)$ durchzuführen; wir sehen aber davon ab.

§ 5.

Die orthogonalen Netze auf der Kugel und Pseudosphäre.

Im Falle der *Kugel* ist nach (80) und (47) die Funktionalgleichung zu lösen:

$$(120)\qquad \frac{16 r_0^2 F F' \Phi \Phi'}{(1+F^2\Phi^2)^2} = \frac{1}{(U+V)^2}\,.$$

Durch einmalige logarithmische Differentiation nach $u+iv$ und darauffolgende Differentiation nach $u-iv$ kommt hieraus:

$$(121)\qquad \frac{16 F F' \Phi \Phi'}{(1+F^2\Phi^2)^2} = \frac{(U+V)(U''+V'')-U'^2-V'^2}{(U+V)^2}\,.$$

Der Vergleich mit (120) gibt für $r_0 = 1$:

$$(122)\qquad (U+V)(U''+V'')-U'^2-V'^2 = 1\,,$$

eine Gleichung, die sich auch aus der Formel für das Krümmungsmass ergibt. Durch Differentiation nach u und v findet man:

$$(123)\qquad U' V''' + V' U''' = 0\,,$$

also für $U' \neq 0$, $V' \neq 0$:

$$(124)\qquad \begin{cases} U''' = kU', & U'' = kU + l_1\,, \\ V''' = -kV', & V'' = -kV + l_2\,. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in (122) ein, so erhält man:

$$(125)\qquad \begin{cases} U'^2 = kU^2 + (l_1+l_2)U + m^2 - 1\,, \\ V'^2 = -kV^2 + (l_1+l_2)V - m^2\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind mit (124) verträglich, wenn ist:

$$l_1 = l_2 = l\,.$$

Wird nun $k \neq 0$ angenommen, so kann man $l = 0$ setzen und es kommt dann für $k = -\alpha^2$ durch Integration:

$$(126)\qquad U = \frac{\sqrt{m^2-1}}{\alpha}\cos(\alpha U)\,, \qquad V = \frac{m}{\alpha}\cos(i\alpha V)\,.$$

Für $k = 0$ erhält man:

$$(127)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{1}{2l}(l^2U^2 + 1 - m^2)\,, \\ V = \dfrac{1}{2l}(l^2V^2 + m^2)\,. \end{cases}$$

Wird aber:

$$U' = 0, \quad U = a, \tag{128}$$

so ist (123) für jedes V erfüllt; aus (122) findet man dann:

$$(V+a)V'' - V'^2 = 1,$$

also:

$$V = \frac{e^{\alpha v} + e^{-\alpha v}}{2\alpha} - a, \tag{129}$$

wo $\alpha \neq 0$ sein muss.

Nehmen wir zunächst die Werte (126). Die Gleichung (121) können wir dann in die Form bringen:

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\xi\right)\sqrt{(F^2)'}} \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\eta\right)\sqrt{(\Phi^2)'}} (1 + F^2\Phi^2) \tag{130}$$

$$= 2\left(a \operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\eta\right) + b \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\xi\right)\right),$$

wo gesetzt ist:

$$\xi = u + iv, \quad \eta = u - iv, \tag{131}$$

$$\alpha a = m + \sqrt{m^2 - 1}, \quad \alpha b = m - \sqrt{m^2 - 1}.$$

Differentiation nach ξ und η gibt:

$$\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\xi\right)\sqrt{(F^2)'}}\right)' \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\eta\right)\sqrt{(\Phi^2)'}}\right)'$$

$$+ \left(\frac{F^2}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\xi\right)\sqrt{(F^2)'}}\right)' \left(\frac{\Phi^2}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\eta\right)\sqrt{(\Phi^2)'}}\right)' = 0,$$

somit:

$$\begin{cases} F^2 = k + l_1 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\xi\right)\sqrt{(F^2)'}, \\ \Phi^2 = -\frac{1}{k} + l_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\eta\right)\sqrt{(\Phi^2)'}, \end{cases} \tag{132}$$

oder:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\xi\right)\sqrt{(F^2)'} = k_1, \quad \Phi^2 = k_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\eta\right)\sqrt{(\Phi^2)'}\ ^{11}); \tag{133}$$

---

[11]) Die Möglichkeit, dass gleichzeitig $\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\xi\right)\sqrt{(F^2)'}}\right)' = 0$, $\left(\frac{F^2}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\xi\right)\sqrt{(F^2)'}}\right)' = 0$, scheidet aus, da sie auf $F^2 = \text{const.}$ führen würde.

durch Integration und Einsetzen in (130) ergibt sich hieraus:

$$(134)\qquad \begin{cases} F^2 = k\,\dfrac{\frac{2}{\alpha}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\xi\right) - a^2a^2c_1}{\frac{2}{\alpha}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\xi\right) + c_2}, \\ \Phi^2 = \dfrac{-2\alpha a^2 \operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\eta\right) + c_2}{a^2a^2k\left(\frac{2}{\alpha}\operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\eta\right) + c_1\right)}; \end{cases}$$

bzw.:

$$(135)\qquad \begin{cases} F^2 = \dfrac{2}{\alpha}k_1{}^2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\xi\right) + c, \\ \Phi^2 = \dfrac{1}{2\alpha a^2 k_1{}^2 \operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\eta\right) - c}. \end{cases}$$

Die Realität von r und φ verlangt:

$$(136)\qquad c_2\bar{c}_1 = \frac{4}{\alpha^2}$$

bzw.:

$$(137)\qquad c = 0.$$

Gelten die Gleichungen (127), so erhält (121) die Gestalt:

$$(138)\qquad \frac{(F^2)'(\Phi^2)'}{(1+F^2\Phi^2)^2} = \frac{1}{l^2\left(u^2+v^2+\frac{1}{l^2}\right)^2};$$

diese Gleichung stimmt mit (48) überein, wenn man $u, v, \frac{1}{l^2}$ durch $\bar{u}$, $\bar{v}$, γ ersetzt. Wir erhalten somit nach (54):

$$(139)\qquad \begin{cases} F^2 = \dfrac{1}{l}\,\dfrac{a_1u - a_2v + b_1 + i(a_2u + a_1v + b_2)}{-b_1u - b_2v + \frac{a_1}{l^2} + i\left(b_2 - b_1v - \frac{a_2}{l^2}\right)}, \\ \Phi^2 = \dfrac{1}{l}\,\dfrac{a_1u - a_2v + b_1 - i(a_2u + a_1v + b_2)}{-b_1u - b_2v + \frac{a_1}{l^2} - i(b_2u - b_1v + b_2)}. \end{cases}$$

Sind U, V durch (128) und (129) festgelegt, so kann man (121) in der Form schreiben:

$$\frac{\alpha}{e^{i\frac{\alpha}{2}\xi}\sqrt{(F^2)'}\,e^{i\frac{\alpha}{2}\eta}\sqrt{(\Phi^2)'}}(1-F^2\Phi^2)=e^{-i\alpha\xi}+e^{-i\alpha\eta},$$

wo ξ, η durch (131) bestimmt sind. In der gleichen Weise wie im Falle von (130) findet man dann:

$$(140)\qquad F^2=k\frac{e^{-i\alpha\xi}-c}{c^{-i\alpha\xi}+c},\qquad \Phi^2=\frac{e^{-i\alpha\eta}-\bar{c}}{k(e^{-i\alpha\eta}+\bar{c})},$$

wo $\bar{c}$ den zu c konjugiert imaginären Wert bedeutet, bzw:

$$(141)\qquad F^2=ke^{-i\alpha\xi},\qquad \Phi^2=\frac{1}{k}e^{i\alpha\eta}.$$

Macht man nun von der Beziehung (56) Gebrauch, so erkennt man aus den obigen Gleichungen in der gleichen Weise wie früher die Richtigkeit des Satzes:

Zwei Scharen von Kreisen bilden auf der Kugel ein isometrisches Netz, wenn sie entweder ein elliptisches und hyperbolisches Büschel oder zwei parabolische Büschel durch denselben Punkt bilden, deren Achsen zueinander senkrecht stehen[12].

In ganz der gleichen Weise lässt sich die Pseudosphäre behandeln. Die aus (57), (58) und (80) hervorgehende Funktionalgleichung

$$(142)\qquad \frac{4r_0^2F'\Phi'}{(F+\Phi)^2}=\frac{1}{(U+V)^2}$$

geht durch die Substitution (61) über in:

$$(143)\qquad \frac{4r_0^2(\bar{F}^2)'(\bar{\Phi}^2)'}{(1+\bar{F}^2\bar{\Phi}^2)^2}=-\frac{1}{(U+V)^2};$$

somit wird für $r_0=1$ (vgl. (121) und (122)):

$$(144)\qquad (U+V)(U''+V'')-U'^2-V'^2=-1$$

mit den Lösungen:

$$(145)\qquad U=\frac{\sqrt{m^2+1}}{\alpha}\cos(\alpha u),\qquad V=\frac{m}{\alpha}\cos(\alpha iv),$$

oder:

$$(146)\qquad \begin{cases} U=\dfrac{1}{2l}(l^2u^2-1-m^2), \\ V=\dfrac{1}{2l}(l^2v^2+m^2), \end{cases}$$

[12]) Im Falle (141) erhält man das System der Meridian- und Parallelkreise.

oder:

$$(147) \qquad U = a, \quad V = \frac{e^{\alpha v} - e^{-\alpha v}}{2\alpha} - a,$$

oder:

$$U = \cos\alpha \cdot u, \quad V = \sin\alpha \cdot v.$$

Die für (145)—(147) aus (143) kommenden Gleichungen sind im wesentlichen dieselben wie im Falle der Kugel[13]); im Falle (148) erhält man die (143) entsprechende Gleichung aus (65) für $\gamma = 0$, $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$. Somit haben wir den Satz:

Zwei Scharen von Kurven konstanter geadätischer Krümmung bilden auf der Pseudosphäre ein isometrisches Netz, wenn sie entweder ein elliptisches und hyperbolisches Büschel oder zwei parabolische Büschel durch denselben Punkt mit orthogonalen Achsen bilden. Die Flächen negativer konstanter Krümmung sind die einzigen Flächen, auf denen isometrische Netze existieren derart, dass alle Kurven der einen wie der andern Schar je dieselbe konstante geodätische Krümmung haben.

Kaunas, Mathematisches Seminar der Universität, den 25. November 1929.

---

[13]) (147) führt auf das System der Meridiankurven und Parallelkreise.

Kreivių tinklų ant paviršių tyrinėjimai.

2.

Apie kreivių tinklus ir erdvės dalinimą celėmis.

Paraše P. KATILIUS.

Šiame darbe nagrinėjami toki klausimai:

1. Įrodoma, kad be plokštumos ir bet kokių cilindrinių ir kūginių paviršių geodetiškai rombiniai tinklai, turį diagonalėmis kreivumo linijas, yra galimi tik ant sukimosi ir ant antro laipsnio paviršių.

2. Įrodoma, kad visi pusiau romboedriniai tiesių tinklai erdvėje yra nustatomi dviemis plokštumų šeimomis ir viena šeima panašiai padidintų arba lygiagrečiai pastūmėtų hiperbolinių paraboloidų arba vienašakių hiperboloidų; romboedriniai tiesių tinklai erdvėje gali būt sudaryti tik iš 3 lygiagrečių plokštumų šeimų susikirtimo tiesių.

3. Surandama būtina ir pakankama sąlyga, kad 3 kreivių šeimos, duotos 3 diferencialinėmis lygtimis, sudarytų trikamkinį tinklą. Įrodoma, kad jei ši sąlyga nėra patenkinta, tai dvilypis integralas iš reiškinio W (pusl. 55) turi invariantinę ypatybę bet kokios taškų transformacijos atžvilgiu. Taip pat surandama jo geometrinė reikšmė.

4. Surandama būtinos ir pakankamos sąlygos, kad 4 Pfaff'o diferencialinių lygčių integraliniai paviršiai sudarytų Sauer'io erdvės dalinimą celėmis. Surandami atitinkami invariantai ir nustatoma jųjų geometrinė reikšmė.

Über Kurvennetze auf Flächen[1]).

Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der litauischen Universität in Kaunas.

Nr. 2

Über Kurvennetze und Zellteilungen.

Von

P. Katilius in Kaunas (Litauen).

Einleitung.

Herrn A. Voss[2]) verdankt man den Satz, dass die Liouvilleschen Flächen die einzigen Flächen sind, auf denen geodätische Linien rhombisch angeordnet werden können. Her H. Liebmann[3]) stellte die Frage: auf welchen Liouvilleschen Flächen stellen die Diagonalkurven von einem geodätisch-rhombischen Netze Krümmungslinien dar, die in § 1 dieser Arbeit behandelt wird. Es wird nämlich gezeigt werden, dass ausser der Ebene und den allgemeinen Zylinder = u. Kegelflächen solche Netze nur auf Rotationsflächen und Flächen zweiter Ordnung möglich sind.

In § 2 wird ebenfalls auf Herrn H. Liebmann[4]) zurückgehende Frage untersucht: nämlich die Bestimmung aller rhomboëdrischen und halbrhomboëdrischen Geradennetze. Nach Herrn H. Liebmann[5]) heisst das Netz rhomboëdrisch, wenn das durch die Gleichungen

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

gegebene Kurvennetz noch die Bedingung

$$(1a) \quad x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = x_w^2 + y_w^2 + z_w^2$$

---

[1]) Als Inaugural-Dissertation von der Naturwissenschaftlich-Mathematischen Fakultät der Universität Heidelberg zugelassen.

[2]) Vgl. A. Voss, Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. Sitzungsberichte d. Bayr. Akad. d. Wiss. math. phys. Kl. Bd. 36 (1906) S. 269.

[3]) Vgl. H. Liebmann, Rhombische Geradennetze im Raum. Sitzungsberichte d. Heidelberger Akad. d. Wiss. math. — nat. Kl. Jahrgang 1927. 2 Abh. S. 6.

[4]) l. c. S. 6.

[5]) l. c. S. 3 — 6.

erfüllt. Ist nur

$$x_u^2+y_u^2+z_u^2=x_v^2+y_v^2+z_v^2 \tag{1b}$$

und weiter

$$(x_u^2+y_u^2+z_u^2):(x_w^2+y_w^2+z_w^2)=A(w):B(u,\ v), \tag{1c}$$

so heisst das Netz halbrhomboëdrisch.

Herr H. Liebmann[1]) hat die dreifach rhombischen Geradennetze untersucht, für sie ist

$$\Sigma x_u^2:\Sigma x_v^2:\Sigma x_w^2=A(v,\ w):B(u,\ w):C(u,\ v).$$

Er fand, dass alle dreifach rhombischen Geradennetze in der Form

$$x:y:z:1=X:Y:Z:N \tag{2}$$

enthalten sind, wo X, Y, Z, N trilineare Funktionen von u, v und w sind.

Es ist klar, dass alle halbrhomboëdrischen und rhomboëdrischen Geradennetze auch in (2) enthalten sind; es bleibt nur die Bestimmung der Koeffizienten von den trilinearen Funktionen X, Y, Z und N übrig. Als Ergebnis ist hier gefunden worden, dass alle halbrhomboëdrischen Geradennetze entweder in dem von Herrn H. Liebmann[2]) behandelten Beispiele:

$$x=\frac{a_{12}uv+a_1u+a_2v+a_0}{d_{12}uv+d_1u+d_2v+d_0}w,\quad y=\frac{b_{12}uv+b_1u+b_2v+b_0}{d_{12}uv+d_1u+d_2v+d_0}w,$$

$$z=\frac{c_{12}uv+c_1u+c_2v+c_0}{d_{12}uv+d_1u+d_2v+d_0}w$$

oder in:

$$x=\frac{a_{12}uv+a_1u+a_2v+a_0}{d_{12}uv+d_1u+d_2v+d_0}+k_1w,\ y=\frac{b_{12}uv+b_1u+b_2v+b_0}{d_{12}uv+d_1u+d_2v+d_0}+k_2w,$$

$$z=\frac{c_{12}uv+c_1u+c_2v+c_0}{d_{12}uv+d_1u+d_2v+d_0}+k_3w$$

enthalten sind, d. h., dass die Flächen der Scharen $u=$ const. und $v=$ const. Ebenen sind und die Flächen der Schar $w=$ const. entweder ähnlich vergrösserte oder parallel verschobene hyperbolische Paraboloïde oder einmantelige Hyperboloïde darstellen.

Dagegen sind alle rhomboëdrischen Geradennetze auf den trivialen Fall:

---

[1]) l. c. S. 9.

[2]) l. c. S. 6.

$$(3)\qquad \begin{cases} x = a_1 u + a_2 v + a_3 w + a_0, \\ y = b_1 u + b_2 v + b_3 w + b_0, \\ z = c_1 u + c_2 v + c_3 w + c_0 \end{cases}$$

zurückführbar.

In § 3 wenden wir uns der folgenden Aufgabe zu. Gegeben seien drei Kurvenscharen durch drei Differentialgleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} \sin\alpha\, dx - \cos\alpha\, dy = 0, \\ \sin\beta\, dy - \cos\beta\, dy = 0, \\ \sin\gamma\, dx - \cos\gamma\, dy = 0, \end{cases}$$

wobei $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$ Funktionen von x, y sind und stetige partielle Ableitungen bis zur 2. Ordnung besitzen; dann ist das Verschwinden des Ausdruckes:

$$(5)\quad W = \frac{\partial}{\partial x}\sum \frac{\cos\beta\cos\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \cos\alpha\cos(\beta+\gamma-\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial y}}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\alpha)} + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\sum \frac{\sin\alpha\cos(\beta+\gamma-\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \sin\beta\sin\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial y}}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\alpha)}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die gegebenen drei Kurvenscharen ein Dreiecksnetz bilden; dabei bedeutet das Σ — Zeichen die Summation über α, β, γ. Die Dreiecksnetze haben aber die Eigenschaft, dass sie invariant gegenüber einer beliebigen Punkttransformation sind. Führt man deshalb in die gegebenen Differentialgleichungen (4) die neuen Veränderlichen:

$$(6)\qquad \bar{x} = f(x, y),\ \bar{y} = \varphi(x, y)$$

ein, so könnte man vermuten, dass der aus den transformierten Differentialgleichungen gebildete Ausdruck $\bar{W}$ nur durch einen Faktor von W sich unterscheidet. Es wird dann gezeigt, dass

$$(7)\qquad \bar{W} = \frac{W}{D}$$

ist, wobei D die Funktionaldeterminante der Transformation (6) bedeutet. Aus (7) folgt dann, dass das Doppelintegral:

$$\iint W\, dx\, dy,$$

erstreckt über einen beliebigen Bereich der Veränderlichen x, y invariant gegen jede beliebige Punkttransformation bleibt. Ausserdem wird die geometrische Bedeutung von W untersucht.

In § 4 wird das Ergebnis des § 3 auf den Raum übertragen, indem anstatt der Differentialgleichungen (4) 4 Pfaffsche Differentialgleichungen angenommen werden, deren Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind; man erhält so zwei charakteristische Ausdrücke U_1 und U_2, deren Verschwinden notwendig und hinreichend ist für die Sauersche Zellteilung des Raumes durch die Integralflächen der gegebenen Pfaffschen Differentialgleichungen.

Die dreifachen Integrale:

$$\iiint (U_1)^{\frac{1}{5}}\, dxdydz, \quad \iiint (U_2)^{\frac{1}{5}}\, dxdydz$$

erstreckt über einen beliebigen Bereich der Veränderlichen bleiben invariant gegen beliebige Punkttransformation.

Auch wird die geometrische Bedeutung von U_1 und U_2 angegeben.

§ 1.

Die Flächen mit Krümmungslinien als Diagonalkurven der geodätisch-rhombischen Netze.

Wenn auf einer Fläche die Parameterkurven ein geodätisch-rhombisches Netz bilden, so hat das Bogenelement die Form [1]):

$$(1)\quad ds^2 = (F(u+v)+\Phi(u-v))^2(du^2+dv^2) + \\ +2(F^2(u+v)-\Phi^2(u-v))\,du\,dv\,.$$

Führt man die Diagonalkurven als Parameterkurven ein, d. h.:

$$u+v=\bar{u}, \quad u-v=\bar{v},$$

so geht das Bogenelement (1) über in:

$$ds^2 = (F(\bar{u})+\Phi(\bar{v}))(F(\bar{u})d\bar{u}^2+\Phi(\bar{v})d\bar{v}^2)$$

oder in:

$$(2)\qquad ds^2 = (f(u)+\varphi(v))(du^2+dv^2)\,.$$

wenn man setzt:

$$du_1^2 = F(\bar{u})d\bar{u}^2, \quad dv_1^2 = \Phi(\bar{v})d\bar{v}^2$$

und statt u_1, v_1 wieder u, v schreibt. Für die Fundamentalgrössen erster Ordnung hat man also:

---

[1]) A. Voss, l. c. S. 269.

(3) $$E = G = f(u) + \varphi(v), \quad F = 0.$$

Sollen die Kurven u, v Krümmungslinien sein, so verlangt das, dass noch ist:

$$M = 0.$$

Aus den Mainardi - Codazzischen Formeln erhält man dann:

(4a) $$\frac{L_v}{L+N} = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E} = l, \quad \frac{N_u}{L+N} = \frac{1}{2}\frac{E_u}{E} = m$$

und aus der Weingartenschen Gleichung für das Krümmungsmass:

(4b) $$LN = -\frac{E}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{E_u}{E}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{E}\right)\right] = n,$$

woraus für die Grössen l, m, n die Gleichungen folgen:

(5) $$\frac{n_{uv}}{n} = 8lm, \quad l_u = m_v = -2lm.$$

Für die weitere Untersuchung nehmen wir an, dass:

(6) $$l \neq 0, \quad m \neq 0.$$

Die Elimination von L aus (4a) und (4b) ergibt für N die Differentialgleichungen;

$$N_u = \left(\frac{n}{N} + N\right)m, \quad N_v = \left(\frac{n_v}{n} - l\right)N - \frac{lN^3}{n},$$

aus denen wegen der Integrabilitätsbedingung

$$N_{uv} = N_{vu}$$

und mit Rücksicht auf (5) kommt:

(7a) $$ln_uN^4 + (8lmn^2 - n_un_v)N^2 + mn^2n_v = 0.$$

Differentiiert man diese Gleichung nach u und eliminiert N_u, so erhält man:

(7b) $$(2lmn_u + ln_{uu})N^4 + (12lmnn_u - 2mn_un_v + 8lm_un^2 - n_vn_{uu})N^2 + 24lm^2n^3 + m_un^2n_v = 0.$$

Die Gleichungen (7a) und (7b) sind identisch, wenn ist:

$$\frac{2mn_u + n_{uu}}{24lm^2n - m_un_v} = \frac{n_u}{mn_v}$$

und:

$$\frac{12lmnn_u - 2mn_un_v + 8lm_un^2 - n_vn_{uu}}{24lm^2n - m_un_v} = \frac{8lmn^2 - n_un_v}{mn_v}$$

oder:

$$m n_v n_{uu} + 2 m^2 n_u n_v - m_u n_u n_v - 24 l m^2 n n_u = 0,$$
$$m n_v^2 n_{uu} + 2 m^2 n_v^2 - m_u n_u n_v^2 - 36 l m^2 n n_u n_v + 24 \cdot 8 l^2 m^3 n^3 = 0.$$

Diese zwei Beziehungen sind wegen (5) identisch mit:

$$\frac{n_u n_v}{n^2} = 16 l m. \tag{8}$$

Aus den Gleichungen (5) und (8) erhält man jetzt:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg n = -8 l m = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg E^2$$

oder:

$$K = \frac{LN}{E^2} = \frac{n}{E^2} = \mathrm{F}(u)\,\Phi(v), \tag{9a}$$

wobei K das Krümmungsmass bedeutet und die Funktionen F und Φ nicht dieselben wie die oben in (1) eingeführten sind.

Setzt man in (9a) für n und E ihre Werte aus (4b) und (3) ein, so erhält man die Funktionalgleichung:

$$-(f+\varphi)(f''+\varphi'') + f'^2 + \varphi'^2 = 2\mathrm{F}\cdot\Phi\cdot(f+\varphi)^3, \tag{9b}$$

wobei die Striche Ableitungen nach u bzw. v bedeuten.

Durch zweimalige Differentiation der Funktionalgleichung (9b) nach v ergeben sich:

$$-\varphi' f'' - f\varphi''' + \varphi'\varphi'' - \varphi\varphi''' = 2\mathrm{F}(\Phi'(f+\varphi)^3 + 3\Phi\varphi'(f+\varphi)^2),$$
$$-\varphi'' f'' - f\varphi^{(4)} + \varphi''^2 - \varphi\varphi^{(4)} = 2\mathrm{F}(\Phi''(f+\varphi)^3$$
$$+ (6\Phi'\varphi' + 3\Phi\varphi'')(f+\varphi)^2 + 6\Phi\varphi'^2(f+\varphi)).$$

Da nach (6) $\varphi' \neq 0$, $\varphi'' \neq 0$ sein müssen, so erhält man hieraus durch Elimination von f'':

$$\varphi^{(4)}\varphi' - \varphi'''\varphi'' = 2\mathrm{F}\left((\Phi'\varphi'' - \Phi''\varphi')(f+\varphi)^2 - 6\Phi\varphi'^2(f+\varphi) - 6\Phi\varphi'^3\right)$$

oder:

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2(a_1 f^2 + a_2 f + a_3)}, \tag{10}$$

wobei:

$$a_1 = \frac{\Phi'\varphi'' - \Phi''\varphi'}{\varphi^{(4)}\varphi' - \varphi'''\varphi''}, \tag{11a}$$

$$a_2 = 2 a_1 \varphi - \frac{6\Phi'\varphi'^2}{\varphi^{(4)}\varphi' - \varphi'''\varphi''} \tag{11b}$$

(11c) $$a_3 = -a_1\varphi^2 + a_2\varphi - \frac{6\Phi\varphi'^3}{\varphi^{(4)}\varphi' - \varphi'''\varphi''}$$

zunächst Funktionen von v sind. Da aber die Gleichung (10 für alle Werte von v gelten muss, so kann man a_1, a_2, a_3 als konstant annehmen. Durch zweimalige Integration der Gleichung (11e) ergibt sich:

$$\Phi = -a_1\varphi'' + b_1\varphi + b_2,$$

wobei b_1, b_2 neue Konstanten sind. Setzt man diesen Wert von Φ in die Gleichungen (11b) und (11c) ein und eliminiert aus ihnen $(\varphi^{(4)}\varphi' - \varphi'''\varphi'')$, so erhält man nach einmaliger Integration

(12a) $$-a_1\varphi'' + b_1\varphi + b_2 = \frac{-\frac{d}{4a_1}}{-a_1\varphi^2 + a_2\varphi - a_3}.$$

Berechnet man nun φ''' und $\varphi^{(4)}$ und setzt die so erhaltenen Werte in (11c) ein, so findet man:

$$a_3 = \frac{a_2^2}{4a_1},$$

somit:

(12) $$F = \frac{2a_1}{(2a_1 f + a_2)^2}, \quad \Phi = \frac{d}{(2a_1\varphi - a_2)^2}.$$

Durch Integration der Gleichung (12a) erhält man schliesslich:

$$a_1\varphi'^2 - b_1\varphi^2 - 2b_2\varphi - b_3 = \frac{\frac{d}{a_1}}{(2a_1\varphi - a_2)}.$$

In analoger Weise erhält man unter Beachtung der Gleichung (12):

a) $$a_1 f'^2 - c_1 f^2 - 2c_2 f - c_3 = \frac{2}{2a_1 f + a_2}$$

oder:

b) $$a_1 f'^2 - c_1 f^2 - 2c_2 f - c_3 = -\frac{2}{2a_1 f + a_2}$$

Der Fall a) führt auf:

$$d = 2a_1,\ c = -b_1,\ c_2 = b_2,\ c_3 = -b_3,$$

der Fall b) auf:

$$d = -2a_1,\ c = -b_1,\ c_2 = b_2,\ c_3 = -b_3.$$

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die Differentialgleichungen für f und φ von 5 Konstanten abhängen, von denen aber nur 3 wesentlich sind; denn man kann die Konstante a_2 immer gleich Null setzen, da durch Einführung von:

$$\bar{f} = f + \frac{a_2}{2a_1}, \quad \bar{\varphi} = \varphi - \frac{a_2}{2a_1}$$

das Bogenelement und die Differentialgleichungen für f und φ unverändert bleiben. Ebenso kann man durch Einführung der neuen Parameter:

$$u = p\bar{u}, \quad v = p\bar{v}$$

die Konstante p so wählen, dass

$$\frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_1} = 1, \text{ bzw. } \frac{2\bar{b}_2}{\bar{a}_1} = 1$$

wird, wenn $b_1 \neq o$, bzw. $b_1 = o$ ist. Somit kann man die Differentialgleichungen für f und φ in der Form schreiben:

$$\text{(13a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} f'^2 = \dfrac{f^3 + \beta_1 f^2 + \beta_2 f \pm \beta_3^2}{f}, \\ \varphi'^2 = \dfrac{-\varphi^3 + \beta_1 \varphi^2 - \beta_2 \varphi \pm \beta_3^2}{\varphi}; \end{array} \right\} b_1 \neq o,$$

$$\text{(13b)} \quad f'^2 = \frac{f^2 + \beta_2 f \pm \beta_3^2}{f}, \quad \varphi'^2 = \frac{\varphi^2 - \beta_2 \varphi \pm \beta_3^2}{\varphi}, \quad b_1 = o.$$

Dabei ist das + Zeichen im Falle a) (das positive Krümmungsmass) und das — Zeichen im Falle b) (das negative Krümmungsmass) zu nehmen; β_1 β_2, β_3 bezeichnen die neuen Konstanten.

Wie man sieht, sind f bzw. φ elliptische Funktionen von u bzw. v. Aber man kann die Gestalt der Fläche vollständig bestimmen, ohne die Differentialgleichungen für f und φ zu integrieren; denn man weiss, dass, wenn alle 6 Fundamentalgrössen E, F, G, L, M, N als Funktionen von u und v gegeben sind und die Mainardi — Codazzischen Formeln erfüllen, die Fläche (abgesehen von einer Bewegung im Raum) vollständig bestimmt ist. In unserem Falle ist die Fläche schon bei gegebenen f und φ bestimmt, da $M = o$ ist und L u. N als Funk-

tionen von f und φ sich bestimmen lassen. So findet man z. B. für N aus den Gleichungen (7a) und (8):

$$N^2 = \frac{4mn^2}{n_u}$$

oder, wenn man entsprechende Werte

$$m = \frac{1}{2}\frac{f'}{f+\varphi},\quad n = \pm\frac{(f+\varphi)^2}{4a_1^2 f^2\varphi^2},\quad n_u = \mp\frac{(f+\varphi)f'}{2a_1^2 f^3\varphi}$$

einsetzt:

$$N^2 = \mp\frac{(f+\varphi)^2}{4a_1^2 f\varphi^3}. \tag{14a}$$

In analoger Weise findet man:

$$L^2 = \mp\frac{(f+\varphi)^2}{4a_1^2 f^3\varphi}. \tag{14b}$$

Wenn wir uns nun auf reelle Flächen beschränken, so können wir zeigen, dass nur die Flächen 2. Ordnung, bezogen auf Krümmungslinien als Parameterkurven, die Differentialgleichungen (13a) und (13b) erfüllen.

Die Realität der Fläche verlangt, dass

$$f+\varphi > 0$$

ist und ausserdem f und φ im Falle a) entgegengesetzte, im Falle b) gleiche Vorzeichen haben, wie aus (14a) und (14b) sofort folgt. Da ferner auch $f'^2 > 0$ und $\varphi'^2 > 0$ ist, so lassen sich die Differentialgleichungen für f und φ überführen im Falle a) in

$$\text{(15a)}\quad \begin{cases} f'^2 = \dfrac{(f+a^2)(f\pm b^2)(f\pm c^2)}{f}, \\ \varphi'^2 = -\dfrac{(\varphi-a^2)(\varphi\mp b^2)(\varphi\mp c^2)}{\varphi}, \\ f'^2 = \dfrac{(f\mp a^2)(f\mp b^2)}{f},\quad \varphi'^2 = \dfrac{(\varphi\pm a^2)(\varphi\pm b^2)}{\varphi}, \end{cases}$$

und im Falle b) in:

$$\text{(15b)}\quad \begin{cases} f'^2 = \dfrac{(f-a^2)(f+b^2)(f+c^2)}{f}, \\ \varphi'^2 = -\dfrac{(\varphi+a^2)(\varphi+b^2)(\varphi+c^2)}{\varphi}, \\ f'^2 = \dfrac{(f-a^2)(f+b^2)}{f},\quad \varphi'^2 = \dfrac{(\varphi+a^2)(\varphi-b^2)}{\varphi}, \end{cases}$$

dabei bedeuten a, b, c Konstanten, und in (15a) ist entweder das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen. Führt man jetzt $f=\bar{u}$ und $\varphi=\bar{v}$ als Parameter ein, so geht ds^2 gerade in die Form über, die man erhält, wenn man das Bogenelement der Flächen 2. Ordnung auf die Krümmungslinien als Parameterkurven bezieht, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Es bleibt noch der Sonderfall zu untersuchen, wo die Voraussetzungen (6) nicht erfüllt sind. Sind gleichzeitig l und m gleich Null, so muss entweder L oder N oder auch beide gleich Null sein. Sind $L=0$ und $N=0$, so verschwinden also alle 3 Fundamentalgrössen 2. Ordnung; unsere Fläche geht also in eine Ebene über. Nehmen wir an, dass nur $N=0$ ist, dann ist L eine Funktion von u allein und die betrachtete Fläche stellt eine beliebige Zylinder = oder Kegelfläche dar.

Schliesslich bleibt noch der Fall zu untersuchen, wo nur eine der beiden Grössen $l=0$ ist, d. h. $E_v=0$ ist; dann sind auch $L_v=0$ und $N_v=0$, also L, N und E Funktionen nur von u. Die Gleichungen (4) gehen dann über in:

$$LN=-\frac{E}{2}\frac{d}{du}\frac{E_u}{E}\,,\qquad \frac{N_u}{L+N}=\frac{1}{2}\frac{E_u}{E}\,,$$

woraus man durch Elimination von L die für N^2 lineare Differentialgleichung:

$$\frac{d}{du}N^2=\frac{E_u}{E}N^2-\frac{E_u}{2}\frac{d}{du}\frac{E_u}{E}\,,$$

erhält, die integriert gibt:

$$N^2=E\left(C-\frac{1}{4}\left(\frac{E_u}{E}\right)^2\right)\,,$$

wo C eine Integrationskonstante ist. Die Konstante C ist aber unwesentlich, da sie nur von der Parameteränderung

$$u=p\bar{u},\quad v=p\bar{v}$$

abhängt, wobei p eine Konstante bedeutet. Also sind L und N durch E vollständig bestimmt; man erhält somit zu jedem gegebenen E eine und nur eine Fläche und zwar eine beliebige Rotationsfläche, da E nur von u abhängt.

Somit erhalten wir den Satz:

Ausser der Ebene und allgemeinen Zylinder = u. Kegelflächen sind die Rotationsflächen und die Flächen zweiter Ordnung

die einzigen Flächen, auf denen die Diagonalkurven eines geodätisch-rhombischen Netzes Krümmungslinien darstellen.

§ 2.

Halbrhomboëdrische und rhomboëdrische Geradennetze.

Soll das halbrhomboëdrische oder rhomboëdrische Kurvennetz aus Geraden bestehen, so treten zu den Gleichungen (1a), (1b) und (1c) (S. 36—37) die weiteren;

$$(1)\quad \begin{cases} x_{uu} = \lambda x_u\,, & x_{vv} = \mu x_v\,, & x_{ww} = \nu x_w\,, \\ y_{uu} = \lambda y_u\,, & y_{vv} = \mu y_v\,, & y_{ww} = \nu y_w\,, \\ z_{uu} = \lambda z_u\,, & z_{vv} = \mu z_v\,, & z_{ww} = \nu z_w\,. \end{cases}$$

Betrachtet man die Gleichungen (1) allein, so hat man das von Herrn A. Voss[1]) gestellte Problem: alle dreifachen Flächensysteme zu bestimmen, von denen je zwei Flächen sich in Haupttangentenkurven schneiden. Herr A. Voss hat mit Hilfe seiner für allgemeine dreifache Flächensysteme gestellten 6 Bedingungsgleichungen die Aufgabe auf 12 ziemlich komplizierte Differentialgleichungen zurückgeführt. Indes lässt sich die Frage einfacher durch Zurückführung auf die von Herrn H. Liebmann[2]) aufgestellten Differentialgleichungen für dreifach rhombische Geradennetze behandeln.

Berechnet man nämlich aus den Gleichungen (1):

$$x_{uuv} = \lambda_v x_u + \lambda x_{uv},\quad x_{vvu} = \mu_u x_v + \mu x_{uv},$$
$$x_{uuvv} = \lambda_{vv} x_u + 2\lambda_v x_{uv} + \lambda(\mu_u x_v + \mu x_{uv}),$$
$$x_{vvuu} = \mu_{uu} x_v + 2\mu_u x_{uv} + \mu(\lambda_v x_u + \lambda x_{uv})$$

und beachtet die Integrabilitätsbedingung

$$x_{uuvv} = x_{vvuu},$$

so kommt:

$$2(\lambda_v - \mu_u) x_{uv} + (\lambda_{vv} - \mu\lambda_u) x_u - (\mu_{uu} - \lambda\mu_u) x_v = 0;$$

---

[1]) A. Voss, Über dreifache Flächensysteme und Ermittelung von Flächen, deren Minimalkurven durch Quadraturen bestimmt sind. Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Math. — naturwiss. Abteilung, XXXI B. 4 Abh. (1922) S. 26—28.

[2]) l. c. S. 2.

analog für y und z:

$$2(\lambda_v - \mu_u)\, y_{uv} + (\lambda_{vv} - \mu\lambda_v)\, y_u - (\mu_{uu} - \lambda\mu_u)\, y_v = 0,$$
$$2(\lambda_v - \mu_u)\, z_{uv} + (\lambda_{vv} - \mu\lambda_v)\, z_u - (\mu_{uu} - \lambda\mu_u)\, z_v = 0.$$

Diese drei Gleichungen verlangen entweder, dass

$$\begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & z_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0$$

ist oder dass

(2a) $$\lambda_v - \mu_u = 0,\ \lambda_{vv} - \mu\lambda_v = 0,\ \mu_{uu} - \lambda\mu_u = 0$$

sind. Im ersten Falle erhält man $M = 0$ und da wegen der Gleichungen (1) auch $L = 0$ und $N = 0$ sind, so ist die Fläche $w = \text{const.}$ eine Ebene. Schliessen wir diesen Fall aus und vertauschen wir in Gleichungen (2a) λ bzw. μ mit ν und entsprechend u bzw. v mit w, so erhalten wir:

(2b) $$\begin{cases} \lambda_v - \mu_u = 0,\ \lambda_{vv} - \mu\lambda_v = 0,\ \mu_{uu} - \lambda\mu_u = 0, \\ \lambda_w - \nu_u = 0,\ \lambda_{ww} - \nu\lambda_w = 0,\ \nu_{uu} - \lambda\nu_u = 0, \\ \mu_w - \nu_v = 0,\ \mu_{ww} - \nu\mu_w = 0,\ \nu_{vv} - \mu\nu_v = 0. \end{cases}$$

Die erste Kolonne dieser Gleichungen ist identisch mit:

$$\lambda = f_u,\ \mu = f_v,\ \nu = f_w;$$

aus der zweiten und dritten Kolonne folgt dann:

(2c) $$\begin{cases} f_{uvv} - f_v f_{uv} = 0,\ f_{uuv} - f_u f_{uv} = 0, \\ f_{uww} - f_w f_{uw} = 0,\ f_{uuw} - f_u f_{uw} = 0, \\ f_{vww} - f_w f_{vw} = 0,\ f_{vvw} - f_v f_{vw} = 0, \end{cases}$$

womit sich also die Gleichungen Liebmanns für die dreifach rhombische Netze ergeben; man kann deshalb nach Herrn Liebmann durch Normierung der Parameter u, v, w erreichen, dass x die Differentialgleichungen:

$$2x_{uuu}x_u - 3x^2_{uu} = 0,\ 2x_{vvv}x_v - 3x^2_{vv} = 0,\ 2x_{www}x_w - 3x^2_{ww} = 0$$

erfüllt (ähnliche Differentialgleichungen gelten auch für y und z). Dieses System von Differentialgleichungen unter Berücksichtigung von (1) hat folgende Lösung

(3) $$x : y : z : 1 = X : Y : Z : N,$$

wobei

$$X = a_{123}\,uvw + a_{12}\,uv + a_{13}\,uw + a_{23}\,vw + a_1\,u + a_2\,v + a_3\,w + a_0,$$
$$Y = b_{123}\,uvw + b_{12}\,uv + b_{13}\,uw + b_{23}\,vw + b_1\,u + b_2\,v + b_3\,w + b_0,$$
$$Z = c_{123}\,uvw + c_{12}\,uv + c_{13}\,uw + c_{23}\,vw + c_1\,u + c_2\,v + c_3\,w + c_0,$$
$$N = d_{123}\,uvw + d_{12}\,uv + d_{13}\,uw + d_{23}\,vw + d_1\,u + d_2\,v + d_3\,w + d_0$$

sind. Dieses Ergebnis benützen wir für die Bestimmung halbrhomboëdrischer und rhomboëdrischer Geradennetze.

Setzt man

(4) $$\Sigma x_u^2 = \Sigma x_v^2 = e^{2F},$$

so erhält man durch Differentiation nach u bzw. v:

$$F_u = f_u,\ F_v = f_v$$

oder:

$$F = f + W,$$

wo W eine Funktion nur von w ist. Differentiiert man (4) zweimal nach u, so ergibt sich:

$$\Sigma x_{uv}^2 + \Sigma x_v x_{uuv} = (f_{uu} + 2f_u^2)\,e^{2F},$$

oder:

$$\Sigma x_{uv}^2 + f_{uv}\,\Sigma x_u x_v = (f_{uu} + f_u^2)\,e^{2F};$$

die Vertauschung von u mit v führt unmittelbar auf:

$$\Sigma x_{uv}^2 + f_{uv}\,\Sigma x_u x_v = (f_{vv} + f_v^2)\,e^{2F};$$

es muss also sein:

(5) $$f_{uu} + f_u^2 = f_{vv} + f_v^2.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach w und Einsetzen der entsprechenden Werte für f_{uuw} und f_{vvw} aus (2c), erhält man:

(6) $$f_u f_{uw} = f_v f_{vw}.$$

Wenn man diese Gleichung noch einmal nach w differentiiert und wieder für f_{uww} und f_{vww} ihre Werte aus (2c) einsetzt, so erhält man:

$$f^2_{uw} = f^2_{vw}$$

oder:

$$f_{uw} = \pm f_{vw};$$

es genügt das + Zeichen zu berücksichtigen, da man durch Vertauschen des Vorzeichens eines der Parameter den Fall des — Vorzeichens auf den mit + Vorzeichen zurückführen kann. Aus (6) ergeben sich jetzt 2 Fälle:

1. $f_u = f_v$,
2. $f_{uw} = f_{vw} = 0$.

1. $f_u = f_v$. Nehmen wir an, dass $f_u = f_v \neq 0$ ist, so kommen wir zu einem Widerspruch. Führen wir nämlich die Bezeichnungen:

$$x_u = e^F \varphi_1 , \quad x_v = e^F \psi_1 ,$$
$$y_u = e^F \varphi_2 , \quad y_v = e^F \psi_2 ,$$
$$z_u = e^F \varphi_3 , \quad z_v = e^F \psi_3$$

ein, wo φ_1, φ_2, φ_3 bzw. ψ_1, ψ_2, ψ_3 die Cosinus der Winkel der u — Gerade bzw. v — Gerade gegen die Koordinatenachsen sind, so folgt aus der Gleichung

$$x_{uu} = f_u x_u = f_u e^F \varphi_1 = f_u e^F \varphi_1 + e^F \varphi_{1u} ,$$

dass $\varphi_{1u} = 0$ ist (ebenso, dass $\varphi_{2u} = 0$, $\varphi_{3u} = 0$ sind), d. h. dass φ_1, φ_2, φ_3 von u unabhängig sind. Analog ergibt sich, dass ψ_1, ψ_2, ψ_3 von v unabhängig sind.

Setzt man nun $u + v = s$, so erhält man aus der Integrabilitätsbedingung $x_{uv} = x_{vu}$:

$$(7) \qquad f_s(-\varphi_i + \psi_i) = \varphi_{iv} - \psi_{iu} , \quad i = 1,2,3$$

Differentiiert man die Gleichung (7) zweimal nach u und eliminiert man φ_i und φ_{iv}, so ergibt sich:

$$(8a) \qquad (f_{sss} f_s - 2 f_{ss}^2)\, \psi_{iu} + (f_{sss} - f_s f_{ss})\, \psi_{iuu} = f_{ss}\, \psi_{iuuu} ,$$

wenn man voraussetzt, dass $f_{ss} \neq 0$ ist. Durch Einsetzen des Wertes von f_{sss} aus (2d) in (8a) bekommt man:

$$(8b) \qquad \psi_{iuuu} = -k \psi_{iu} , \quad i = 1,2,3$$

wo:

$$k = 2 f_{ss} - f_s^2$$

eine Konstante bedeutet, wie man aus (2c) ersieht. Die Integration der Gleichung (8b) ergibt die drei Fälle:

a) $\psi_i = a_i e^{cu} + b_i e^{-cu} + c_i$, $\quad k = -c^2$,
b) $\psi_i = a_i u^2 + b_i u + c_i$, $\quad k = 0$, $\quad i = 1,2,3$
c) $\psi_i = a_i \sin cu + b_i \cos cu + c_i$, $\quad k = c^2$,

wobei a_i, b_i, c_i Funktionen von w sind. Da

$$\psi_i^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 1$$

ist, so folgt, dass

$$\Sigma a_i^2 = 0, \quad \Sigma b_i^2 = 0,$$

oder wegen der Realität von a_i bzw. b_i :

$$a_i = 0, \quad b_i = 0, \quad i = 1,2,3 .$$

Aber aus (7) ergibt sich jetzt $\psi_i = \varphi_i$, was ausgeschlossen ist. Zu demselben Resultat führt die Annahme $f_{ss} = 0$. Deshalb führt unsere Voraussetzung $f_u = f_v \neq 0$ zu einem Widerspruch. Der Fall $f_u = f_v = 0$ ist ein spezieller Fall von $f_{uw} = f_{vw} = 0$.

2. $f_{uw} = f_{vw} = 0$. Mit der Normierung des Parameters w kann man, da $f_w = f_w(w)$ ist, erreichen, dass

$$x_{\bar{w}\bar{w}} = 0, \quad y_{\bar{w}\bar{w}} = 0, \quad z_{\bar{w}\bar{w}} = 0$$

sind oder:

$$\text{(9a)} \qquad \begin{cases} x = A_1(u,v)\,\bar{w} + A_2(u,v), \\ y = B_1(u,v)\,\bar{w} + B_2(u,v), \\ z = C_1(u,v)\,\bar{w} + C_2(u,v), \end{cases}$$

wo $\bar{w}$ (später wird dieselbe Bezeichnung auch für u und v eingeführt) bedeutet, dass $\bar{w} = \bar{w}(w)$ ist. Andererseits wissen wir, dass sich aus (9a) für x ergibt

$$\text{(9b)} \qquad x = \frac{(a_{123}\,\bar{u}\bar{v} + a_{13}\,\bar{u} + a_{23}\,\bar{v} + a_3)\,\bar{w} + a_{12}\,\bar{u}\bar{v} + a_1\,\bar{u} + a_2\,\bar{v} + a_0}{(d_{123}\,\bar{u}\bar{v} + d_{13}\,\bar{u} + d_{23}\,\bar{v} + d_3)\,\bar{w} + d_{12}\,\bar{u}\bar{v} + d_1\,\bar{u} + d_2\,\bar{v} + d_0};$$

analoges gilt für y und z. Durch Koeffizientenvergleichung von $\bar{w}$ folgt dann

$$A_1 = \frac{a_{123}\,\bar{u}\bar{v} + a_{13}\,\bar{u} + a_{23}\,\bar{v} + a_3}{d_{12}\,\bar{u}\bar{v} + d_1\,\bar{u} + d_2\,\bar{v} + d_0} = \frac{A^*_1}{D},$$

$$A_2 = \frac{a_{12}\,\bar{u}\bar{v} + a_1\,\bar{u} + a_2\,\bar{v} + a_0}{d_{12}\,\bar{u}\bar{v} + d_1\,\bar{u} + d_2\,\bar{v} + d_0} = \frac{A^*_2}{D}.$$

Wir haben nun wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $A_1 = k_1$, $A_2 = k_2$, $A_3 = k_3$, wo k_1, k_2, k_3 Konstanten sind. In diesem Falle erhält man:

$$(10a)\quad \begin{cases} x = k_1\,\bar{w} + \dfrac{a_{12}\,\bar{u}\bar{v} + a_1\,\bar{u} + a_2\,\bar{v} + a_0}{d_{12}\,\bar{u}\bar{v} + d_1\,\bar{u} + d_2\,\bar{v} + d_0}\,, \\ y = k_2\,\bar{w} + \dfrac{b_{12}\,\bar{u}\bar{v} + b_1\,\bar{u} + b_2\,\bar{v} + b_0}{d_{12}\,\bar{u}\bar{v} + d_1\,\bar{u} + d_2\,\bar{v} + d_0}\,, \\ z = k_3\,\bar{w} + \dfrac{c_1\,\bar{u}\bar{v} + c_1\,\bar{u} + c_2\,\bar{v} + c_0}{d_1\,\bar{u}\bar{v} + d_1\,\bar{u} + d_2\,\bar{v} + d_0}\,. \end{cases}$$

Diese Werte von x, y, z erfüllen wirklich mit Berücksichtigung von Normierung der Parameter $\bar{u}, \bar{v}$ die Bedingung für halbrhomboedrische Geradennetze.

b) A_1, A_2, A_3 sind keine Konstanten. Durch Einsetzen x, y, z Werte aus (9b) in

$$\Sigma x^2_{\bar{u}}\,\bar{u}'^2 = \Sigma x^2_{\bar{v}}\,\bar{v}'^2\,,$$

wo $\bar{u}' = \dfrac{d\bar{u}}{du}$ und $\bar{v}' = \dfrac{d\bar{v}}{dv}$ sind, erhält man:

$$\Sigma((A_1^*{}_{\bar{u}}\,D - A_1^*\,D_{\bar{u}})\,\bar{w} + (A_2^*{}_{\bar{u}}\,D - A_2^*\,D_{\bar{u}}))^2\,\bar{u}'^2 =$$
$$= \Sigma((A_1^*{}_{\bar{v}}\,D - A_1^*\,D_{\bar{v}})\,\bar{w} + (A_2^*{}_{\bar{v}}\,D - A_2^*\,D_{\bar{v}}))^2\,\bar{v}'^2\,,$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleichung von $\bar{w}$ ergibt:

$$\Sigma(A_1^*{}_{\bar{u}}\,D - A_1^*\,D_{\bar{u}})^2\,\bar{u}'^2 = \Sigma(A_1^*{}_{\bar{v}}\,D - A_1^*\,D_{\bar{v}})^2\,\bar{v}'^2\,,$$
$$\Sigma(A_1^*{}_{\bar{u}}\,D - A_1^*\,D_{\bar{u}})(A_2^*{}_{\bar{u}}\,D - A_2^*\,D_{\bar{u}})^2\,\bar{u}'^2$$
$$= \Sigma(A_1^*{}_{\bar{v}}\,D - A_1^*\,D_{\bar{v}})(A_2^*{}_{\bar{v}}\,D - A_2^*\,D_{\bar{v}})\,\bar{v}'^2\,,$$
$$\Sigma(A_2^*{}_{\bar{u}}\,D - A_2^*\,D_{\bar{u}})^2\,\bar{u}'^2 = \Sigma(A_2^*{}_{\bar{v}}\,D - A_2^*\,D_{\bar{v}})^2\,\bar{v}'^2\,,$$

oder:

$$\frac{\Sigma(A_1^*{}_{\bar{u}}\,D - A_1^*\,D_{\bar{u}})^2}{\Sigma(A_1^*{}_{\bar{u}}\,D - A_1^*\,D_{\bar{u}})(A_2^*{}_{\bar{u}}\,D - A_2^*\,D_{\bar{u}})}$$
$$= \frac{\Sigma(A_1^*{}_{\bar{v}}\,D - A_1^*\,D_{\bar{v}})^2}{\Sigma(A_1^*{}_{\bar{v}}\,D - A_1^*\,D_{\bar{v}})(A_2^*{}_{\bar{v}}\,D - A_2^*\,D_{\bar{v}})} = k_1\,,$$
$$\frac{\Sigma(A_1^*{}_{\bar{u}}\,D - A_1^*\,D_{\bar{u}})^2}{\Sigma(A_2^*{}_{\bar{u}}\,D - A_2^*\,D_{\bar{u}})^2} = \frac{\Sigma(A_1^*{}_{\bar{v}}\,D - A_1^*\,D_{\bar{v}})^2}{\Sigma(A_2^*{}_{\bar{v}}\,D - A_2^*\,D_{\bar{v}})^2} = k_2\,;$$

dabei sind k_1 und k_2 Konstanten, da die linken Seiten dieser Gleichungen von $\bar{u}$, die rechten von $\bar{v}$ unabhängig sind. Schreibt man diese Gleichungen ausführlich, so kann man sich leicht überzeugen, dass $k_2 = k_1^2$ ist. Setzt man:

$$A_2^* = \frac{A_2^{**}}{k_1}, \quad B_2^* = \frac{B_2^{**}}{k_1}, \quad C_2^* = \frac{C_2^{**}}{k_1},$$

so erhält man:

$$\Sigma\left[\frac{d}{du}\left(\frac{A_1^*}{D}\right)\right]^2 = \Sigma\,\frac{d}{du}\left(\frac{A_1^*}{D}\right)\frac{d}{du}\left(\frac{A_2^{**}}{D}\right) = \Sigma\left[\frac{d}{du}\left(\frac{A_2^{**}}{D}\right)\right]^2,$$

$$\Sigma\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{A_1^*}{D}\right)\right]^2 = \Sigma\,\frac{d}{dv}\left(\frac{A_1^*}{D}\right)\frac{d}{dv}\left(\frac{A_1^{**}}{D}\right) = \Sigma\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{A_2^{**}}{D}\right)\right]^2$$

oder:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{A_1^*}{D}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{A_2^{**}}{D}\right), \quad \frac{d}{du}\left(\frac{B_1^*}{D}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{B_2^{**}}{D}\right),$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{C_1^*}{D}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{C_2^{**}}{D}\right),$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{A_1^*}{D}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{A_2^{**}}{D}\right), \quad \frac{d}{dv}\left(\frac{B_1^*}{D}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{B_2^{**}}{D}\right),$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{C_1^*}{D}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{C_2^{**}}{D}\right),$$

d. h.:

$$\frac{A_2^{**}}{D_1} = \frac{A_1^*}{D} + \alpha_1, \quad \frac{B_2^{**}}{D} = \frac{B_1^*}{D} + \alpha_2, \quad \frac{C_2^{**}}{D} = \frac{C_1^*}{D} + \alpha_3,$$

Somit ergibt sich schliesslich (wenn man von der Koordinatenverschiebung absieht):

(10b)
$$\begin{cases} x = \dfrac{a_{12}\bar{u}\bar{v} + a_1\bar{u} + a_2\bar{v} + a_0}{d_{12}\bar{u}\bar{v} + d_1\bar{u} + d_2\bar{v} + d_0}\, w, \\ y = \dfrac{b_{12}\bar{u}\bar{v} + b_1\bar{u} + b_2\bar{v} + b_0}{d_{12}\bar{u}\bar{v} + d_1\bar{u} + d_2\bar{v} + d_0}\, w, \\ z = \dfrac{c_{12}\bar{u}\bar{v} + c_1\bar{u} + c_2\bar{v} + c_0}{d_{12}\bar{u}\bar{v} + d_1\bar{u} + d_2\bar{v} + d_0}\, w. \end{cases}$$

Hieraus folgt der Satz:

Alle halbrhomboëdrischen Geradennetze sind durch zwei Ebenenscharen und eine Schar von entweder ähnlich vergrösserten oder parallel verschobenen hyperbolischen Paraboloïden oder einmanteligèn Hyperboloïden bestimmt.

Da für die rhomboëdrischen Geradennetze auch nur der Fall $f_{uv}=f_{vw}=f_{uw}=0$ in Betracht kommt, so erhält man in diesem Falle:

$$(11)\qquad \begin{cases} x=a_1\bar{u}+a_2\bar{v}+a_3\bar{w}+a_0, \\ y=b_1\bar{u}+b_2\bar{v}+b_3\bar{w}+b_0, \\ z=c_1\bar{u}+c_2\bar{v}+c_3\bar{w}+c_0, \end{cases}$$

woraus folgt:

Die rhomboëdrischen Geradennetze bestehen aus den Schnittgeraden der drei Scharen von parallelen Ebenen.

Die rhomboëdrischen Geradennetze haben also die Eigenschaft, dass der Winkel zwischen je zwei Schnittkurven der Flächen $u=$ const., $v=$ const. und $w=$ const. überall konstant bleibt. Frägt man nach allgemeinen rhomboëdrischen Netzen, die diese Eigenschaft besitzen, so ist mit Hilfe des Liouvilleschen Satzes[1]) leicht zu beweisen, dass man solche Netze aus den Gleichungen (11) durch konforme Abbildung des Raumes erhält.

§ 3.

Dreiecksnetze aus den Integralkurven dreier Differentialgleichungen[2]).

Es seien drei Differentialgleichungen:

$$(1a)\qquad \begin{aligned} &\sin\alpha\,dx-\cos\alpha\,dy=0, \\ &\sin\beta\,dx-\cos\beta\,dy=0, \\ &\sin\gamma\,dx-\cos\gamma\,dy=0, \end{aligned}$$

---

[1]) Die einzig möglichen konformen Abbildungen des Raumes auf sich selbst sind die Ähnlichkeitstransformationen und die Transformationen mittels reziproker Radienvektoren in Verbindung mit Verschiebung.

[2]). Das Ergebnis dieses Paragraphen, das bereits Weihnacht 1927 fertig gestellt war, deckt sich im wesentlichen mit der inzwischen von Herren W. Blaschke und J. Dubourdieu veröffentlichten Arbeit: „Invarianten von Kurvengeweben", Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburger Universität, VI B. (1928) S. 198., ist unabhängig davon gefunden worden ist.

gegeben, wo sin α, sin β, sin γ; cos α, cos β, cos γ Funktionen von x, y sind, die stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen. Die Frage ist dann: wann bilden die Integralkurven dieser Differentialgleichungen ein Dreiecksnetz?

Bezeichnet man die Multiplikatoren von jeder Gleichung durch M_1, M_2, M_3, so hat man:

$$(1b)\qquad \begin{cases} M_1(\sin\alpha\,dx - \cos\alpha\,dy) = du = 0, \\ M_2(\sin\beta\,dx - \cos\beta\,dy) = dv = 0, \\ M_3(\sin\gamma\,dx - \cos\gamma\,dy) = dw = 0. \end{cases}$$

Die Dreiecksnetzbedingung ist:

$$du + dv + dw \equiv 0,$$

woraus man in Verbindung mit (1b) erhält:

$$\frac{M_1}{\sin(\beta-\gamma)} = \frac{M_2}{\sin(\gamma-x)} = \frac{M_3}{\sin(x-\beta)} = \lambda.$$

Setzt man aus diesen Gleichungen die entsprechenden Werte für M_1, M_2, M_3, in (1b) ein, so erhält man aus den Integrabilitätsbedingungen:

$$\lambda_x \cos\alpha \sin(\beta-\gamma) + \lambda_y \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) + \lambda\Big((\cos\alpha\cdot\alpha_y - \sin\alpha\cdot\alpha_x)\sin(\beta-\gamma) + (\sin\alpha(\beta_y-\gamma_y) + \cos\alpha(\beta_x-\gamma_x))\cos(\beta-\gamma)\Big) = 0,$$

$$\lambda_x \cos\beta \sin(\gamma-\alpha) + \lambda_y \sin\beta \sin(\gamma-\alpha) + \lambda\Big((\cos\beta\cdot\beta_y - \sin\beta\cdot\beta_x)\sin(\gamma-\alpha) + (\sin\beta(\gamma_y-\alpha_y) + \cos\beta(\gamma_x-\alpha_x))\cos(\gamma-\alpha)\Big) = 0.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\lambda_x}{\lambda} = \sum \frac{\sin\alpha\cos(\beta+\gamma-\alpha)\,\alpha_x + \sin\beta\sin\gamma\,\alpha_y}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\alpha)},$$

$$\frac{\lambda_y}{\lambda} = \sum \frac{\cos\beta\cos\gamma\,\alpha_x + \cos\alpha\sin(\beta+\gamma-\alpha)\,\alpha_y}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\alpha)},$$

wobei das Σ—Zeichen die Summierung über α, β, γ bedeutet. Aus

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\lg\lambda = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\lg\lambda$$

folgt:

$$(2a)\qquad W=\frac{\partial}{\partial x}\sum\frac{\cos\beta\cos\gamma\,a_x+\cos\alpha\sin(\beta+\gamma-\alpha)\,a_y}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\alpha)}$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\sum\frac{\sin\alpha\cos(\beta+\gamma-\alpha)\,a_x+\sin\beta\sin\gamma\,a_y}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\alpha)}=0$$

Das Verschwinden von W ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Integralkurven der gegebenen Differentialgleichungen (1a) *ein Dreiecksnetz bilden.*

Als Beispiel nehmen wir an, dass die erste Kurvenschar aus Parallelen zur X—Achse, die dritte aus Parallelen zur Y—Achse gebildet sind, d. h., dass $\alpha=0$ und $\gamma=\frac{\pi}{2}$ sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kurvenschar der Differentialgleichung

$$\sin\beta\,dx-\cos\beta\,dy=0$$

zusammen mit diesen zwei Geradenscharen ein Dreiecksnetz bilden, ist:

$$W=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\lg\operatorname{tg}\beta=0$$

oder:

$$\operatorname{tg}\beta=e^{X+Y},$$

wobei X bzw. Y eine beliebige Funktion von x bzw. y ist; dann ist aber

$$f(x)+\varphi(y)=C$$

die Gleichung der gesuchten Kurvenschar.

Untersuchen wir jetzt, wie sich W bei beliebiger Punkttransformation verändert. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir:

$$\operatorname{tg}\alpha=a,\ \operatorname{tg}\beta=b,\ \operatorname{tg}\gamma=c;$$

dann nimmt W die Form an:

$$(2b)\qquad W=\frac{\partial}{\partial x}\sum\frac{a_x+(b+c-a)\,a_y}{(a-b)\,(c-a)}+\frac{\partial}{\partial y}\sum\frac{a\,a_x+b\,c\,a_y}{(a-b)(c-a)}.$$

Die Transformation wird in zwei Stufen vollzogen; bei der ersten Transformation sollen die Kurven der ersten Schar in die Parallelen zur X— Achse, der dritten Schar in die Parallelen zur Y— Achse übergehen, während bei der zweiten Transformation

diese Geradenscharen wieder in beliebige Kurvenscharen transformiert werden sollen.

Jetzt führen wir die neuen Veränderlichen:

$$\bar{x} = f(x, y), \bar{y} = \varphi(x, y)$$

ein; dabei wird von den Funktionen f und φ verlangt:

$$\text{a)} \quad D = f_x \varphi_y - f_y \varphi_x \neq 0,$$

$$\text{b)} \quad a = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}, \; c = -\frac{f_x}{f_y},$$

d. h. die Kurven der ersten Schar sind in die Parallelen zur X — Achse und die Kurven der dritten Schar in die Parallelen zur Y — Achse transformiert. Für die zweite transformierte Schar erhält man:

$$\operatorname{tg} \bar{\beta} = \bar{b} = \frac{\varphi_y}{f_y} \frac{a - b}{c - b}.$$

Der aus den transformierten Gleichungen (1a) gebildete Ausdruck $\bar{W}$ ist derselbe wie im obigen betrachteten Beispiele; d. h.:

$$\bar{W} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \lg \bar{b}.$$

Mit Hilfe der Symbole:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{D}\left(\varphi_y \frac{\partial}{\partial x} - \varphi_x \frac{\partial}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{D}\left(-f_y \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

wobei $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \bar{y}}$ die Differentiation einer beliebigen Funktion nach $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$ bedeutet — Analoges gilt für $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ — kann man die Beziehung zwischen $\bar{W}$ und W aufstellen. Da nun

$$\lg \bar{b} = \lg \varphi_y - \lg f_y + \lg (a - b) - \lg (c - b)$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \lg \bar{b} = \frac{1}{D}\left(\frac{\varphi_{xy}}{\varphi_y}\varphi_y - \frac{\varphi_{yy}}{\varphi_y}\varphi_x - \frac{f_{xy}}{f_y}\varphi_y + \frac{f_{yy}}{f_y}\varphi_x + \frac{a_x - b_x}{a - b}\varphi_y - \right.$$

$$\left. - \frac{a_y - b_y}{a - b}\varphi_x - \frac{c_x - b_x}{c - b}\varphi_y + \frac{c_y - b_y}{c - b}\varphi_x\right)$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \lg \bar{b} = \frac{a_y}{(c - a) f_y} + \frac{f_{xy}}{(c - a) f_y^2} + \frac{a}{c - a} \frac{f_{yy}}{f_y^2} - \frac{1}{f_y} \sum \frac{a_x}{A} -$$

$$- \frac{a}{f_y} \sum \frac{a_y}{A} = k + l,$$

wobei gesetzt ist:

$$A=(a-b)(c-a),\quad k=\frac{a_y}{(c-a)f_y}+\frac{f_{xy}}{(c-a)f_y^2}+\frac{a}{c-a}\frac{f_{yy}}{f_y^2},$$

$$l=-\frac{1}{f_y}\sum\frac{a_x}{A}-\frac{a}{f_y}\sum\frac{a_y}{A}.$$

Berechnet man weiter:

$$\frac{\partial}{\partial y}k=\frac{1}{D}\Big\{-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{a_y}{c-a}\Big)+\frac{a_y}{c-a}\frac{f_{xy}f_y}{f_y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{a_y}{c-a}\Big)\frac{f_x}{f_y}-$$

$$-\frac{a_y}{c-a}\frac{f_{yy}f_x}{f_y^2}-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{c-a}\Big)\frac{f_{xy}f_y}{f_y^2}-\frac{1}{c-a}f_y\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{f_{xy}}{f_y^2}\Big)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{c-a}\Big)\frac{f_{xy}f_x}{f_y^2}+\frac{1}{c-a}f_x\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{f_{xy}}{f_y^2}\Big)-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{a}{c-a}\Big)\frac{f_{yy}f_y}{f_y^2}-$$

$$-\frac{a}{c-a}f_y\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{f_{yy}}{f_y^2}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{a}{c-a}\Big)\frac{f_{yy}f_y}{f_y^2}+\frac{a}{c-a}f_x\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{f_{yy}}{f_y^2}\Big)\Big\}=$$

$$=\frac{1}{D}\Big\{-\frac{\partial}{\partial x}\frac{a_y}{c-a}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{ca_y}{b-a}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{c_y}{b-a}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{ac_y}{c-a}\Big\}$$

und:

$$\frac{\partial}{\partial x}l=\frac{1}{D}\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\sum\frac{a_x}{A}+\frac{\partial}{\partial x}\Big(a\sum\frac{a_y}{A}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(c\sum\frac{a_x}{A}\Big)+$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(ac\sum\frac{a_y}{A}\Big)\Big\},$$

so erhält man:

$$\overline{W}=\frac{\partial}{\partial y}k+\frac{\partial}{\partial y}l=\frac{1}{D}\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\sum\frac{a_x+(b+c-a)a_y}{(a-b)(c-a)}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\sum\frac{aa_x+bca_y}{(a-b)(b-c)}\Big\}$$

oder:

$$\overline{W}=\frac{W}{D}. \tag{3a}$$

Diese Beziehung zwischen W und $\overline{W}$ gilt allgemein für jede beliebige Punkttransformation; denn transformiert man jetzt die Geradenschar durch die Gleichungen:

$$\bar{x}=F(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}}),\qquad \bar{y}=\Phi(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}})$$

wieder in beliebige Kurvenscharen, so erhält man:

$$(3b) \qquad \overline{\overline{W}} = \frac{\overline{\overline{W}}}{\overline{\overline{D}}} \qquad \overline{\overline{D}} = F_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}}\, \Phi_{\bar{y}}^{\bar{\bar{y}}} - F_{\bar{y}}^{\bar{\bar{y}}}\, \Phi_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}} ,$$

Vergleicht man jetzt (3a) mit (3b), so ergibt sich:

$$(3) \qquad W = \frac{D}{\overline{\overline{D}}}\,\overline{\overline{W}} = \frac{\overline{W}}{\overline{\overline{D}_1}} ,$$

wobei $\overline{\overline{D}_1}$ die Funktionaldeterminante von x und y explicite ausgedrückt durch $\overline{\bar{x}}$ und $\overline{\bar{y}}$ bedeutet.

Wir wollen jetzt die geometrische Deutung für W angeben. Zunächst beschränken wir uns auf das oben betrachtete Beispiel, wo zwei Kurvenscharen aus Parallelen zu den Koordinatenachsen gebildet sind.

Wir legen durch einen beliebigen Punkt — wir wählen den Koordinatenanfang — drei Kurven und zwar je eine von jeder Schar und geben x den Zuwachs Δx. Die Kurve, die nicht mit einer der Koordinatenachsen zusammenfällt, bezeichnen wir durch y_1. Dann gehen durch die Punkte $a(\Delta x, 0)$ und $c(0, y_1(\Delta x))$ zwei andere Kurven dieser Schar, die wir durch y_2 und y_3 bezeichnen. Wir wollen jetzt eine Beziehung zwischen W und dem Inhalte S des schraffierten Viereckes $f\,g\,k\,e$ (Fig. 1) finden

Für den Inhalt dieses Viereckes erhält man:

$$S = (\Delta_2 x - \Delta_1 x)\,[y_1(\Delta_2 x) - y_3(\Delta_1 x)] = b\,(\Delta_2 x - \Delta_1 x)^2 ,$$

wenn man von den höheren Potenzen von $(\Delta_2 x - \Delta_1 x)$ absieht. Um $(\Delta_2 x - \Delta_1 x)$ durch Δx auszudrücken, entwickeln wir y_1, y_2 und y_3 nach Potenzen von x mit Berücksichtigung der Glieder 3. Ordnung:

$$y_1 = b x + \frac{1}{2}(b_x + b b_y) x^2 + \frac{1}{3!}(b_{xx} + 2 b\, b_{xy} + b^2 b_{yy} + b_x b_y + b\, b_y{}^2)\, x^3 ,$$

$$y_2 = b_1 (x - \Delta x) + \frac{1}{2}(b_{1x} + b_1 b_{1y})(x - \Delta x)^2 + \frac{1}{3!}(b_{1xx} + 2 b_1\, b_{1xy} + b_1{}^2 b_{1yy} + b_{1x} b_{1y} + b_1 b_{1y}{}^2)\,(x - \Delta x)^3 ,$$

$$y_3 = b_2 (x - \Delta_1 x) + \frac{1}{2}(b_{2x} + b_2 b_{2y})(x - \Delta_1 x)^2 + \frac{1}{3!}(b_{2xx} + 2 b_2 b_{2xy} + b^2{}_2 b_{2yy} + b_{2x} b_{2y} + b_2 b_{2y}{}^2)\,(x - \Delta_1 x)^3 ,$$

wobei b, b_1, b_2 die entsprechenden Werte von b in den Punkten $o(0,0)$, $a(\Delta x, 0)$, $d(\Delta_1 x, 0)$ bedeuten. Wird b_1 nach Po-

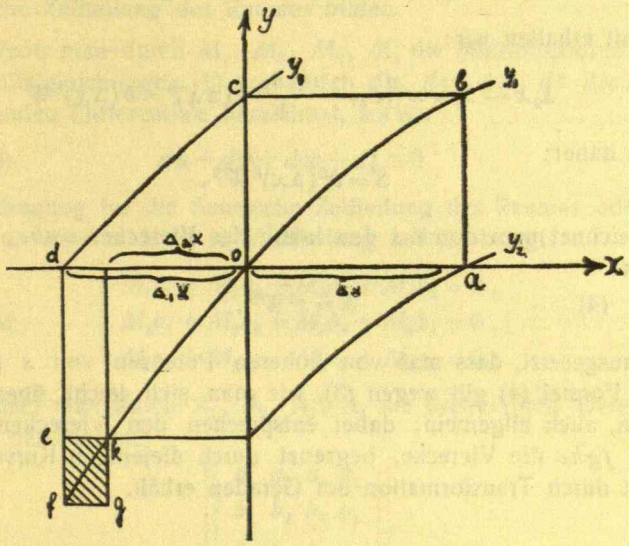


Fig. 1.

tenzen von Δx entwickelt, so führt die Gleichung

$$y_1(\Delta_2 x) = y_2(0)$$

auf:

$$b\Delta_2 x + \tfrac{1}{2}(b_x + bb_y)(\Delta_2 x)^2 + \tfrac{1}{3!}(b_{xx} + 2bb_{xy} + b^2 b_{yy} + b_x b_y + bb_y^2)(\Delta_2 x)^3 = -b\Delta x + (-b_x + \tfrac{1}{2}(b_x + bb_y))(\Delta x)^2 + (-\tfrac{1}{2}b_{xx} + \tfrac{1}{2}(b_{xx} + bb_{xy} + b_x b_y) - \tfrac{1}{3!}(b_{xx} + 2bb_{xy} + b^2 b_{yy} + b_x b_y + bb_y^2))(\Delta x)^3$$

oder:

$$\Delta_2 x = -\Delta x - \frac{b_x}{b}(\Delta x)^2 + \left(\frac{1}{2}b_{xy} - \frac{b_x b_y}{2b} - \frac{b_x^2}{b^2}\right)(\Delta x)^3 .$$

Aus

$$y_1(\Delta x) = y_3(0)$$

folgt in analoger Weise:

$$\Delta_1 x = -\Delta x - \frac{b_x}{b}(\Delta x)^2 + \left(-\frac{1}{2}b_{xy} + \frac{b_x b_y}{2b} - \frac{b_x}{b^2}\right)(\Delta x)^3 .$$

Somit erhalten wir:

$$\Delta_2 x - \Delta_1 x = \left(b_{xy} - \frac{b_x b_y}{b}\right)(\Delta x)^3 = b(\Delta x)^3 W$$

und daher:

$$S = b^3(\Delta x)^6 W^2 .$$

Bezeichnet man durch s den Inhalt des Viereckes $oabc$, so hat man:

$$S = s^3 W^2 , \tag{4}$$

vorausgesetzt, dass man von höheren Potenzen von s absieht. Die Formel (4) gilt wegen (3), wie man sich leicht überzeugen kann, auch allgemein; dabei entsprechen den Vierecken $oabc$ und $fgke$ die Vierecke, begrenzt durch diejenigen Kurven, die man durch Transformation der Geraden erhält.

§ 4.

Die Sauersche Zellteilung des Raumes und Pfaffsche Differentialgleichungen.

In diesem Paragraphen soll das Ergebnis des letzten Paragraphen auf den Raum übertragen werden. Nehmen wir folgende 4 nicht identische Pfaffsche Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz = 0, \\ a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz = 0, \\ a_3 dx + b_3 dy + c_3 dz = 0, \\ a_4 dx + b_4 dy + c_4 dz = 0, \end{cases} \tag{1}$$

wobei a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ beliebige Funktionen von x, y, z sind, die stetige partielle Ableitungen nach x, y und z besitzen und die Integrabilitätsbedingungen erfüllen:

$$a_i(b_{iz} - c_{iy}) + b_i(c_{ix} - a_{iz}) + c_i(a_{iy} - b_{ix}) = 0, \; i = 1, 2, 3, 4. \tag{2}$$

Gesucht sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, welche die Funktionen a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ erfüllen müssen, damit die Integralflächen der gegebenen Gleichungen (1) eine Sauersche Zellteilung des Raumes bilden.

Wenn man durch M_1, M_2, M_3, M_4 die Multiplikatoren der Differentialgleichungen (1) und durch du, dv, dw, dt die entsprechenden Differentiale bezeichnet, so ist:

$$du + dv + dw + dt \equiv 0 \tag{3}$$

die Bedingung für die Sauersche Zellteilung des Raumes, oder es ist dann, wenn man (3) in Verbindung mit (1) bringt:

$$\left\{\begin{aligned} M_1a_1 + M_2a_2 + M_3a_3 + M_4a_4 &= 0\,, \\ M_1b_1 + M_2b_2 + M_3b_3 + M_4b_4 &= 0\,, \\ M_1c_1 + M_2c_2 + M_3c_3 + M_4c_4 &= 0\,. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Bezeichnet man durch A_1, A_2, A_3, A_4 die dreireihigen Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} \right\|,$$

so findet man aus den Gleichungen (4):

$$M_i = \lambda A_i \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Multipliziert man weiter die Gleichungen (1) mit diesen Werten von M_i, so findet man, da jetzt die Differentialgleichungen vollständige Differentiale sein sollen:

$$\left.\begin{aligned} A_ib_i\lambda_x - A_ia_i\lambda_y + \left(\frac{\partial}{\partial x}(A_ib_i) - \frac{\partial}{\partial y}(A_ia_i)\right)\lambda = 0\,, \\ A_ic_i\lambda_x - A_ia_i\lambda_z + \left(\frac{\partial}{\partial x}(A_ic_i) - \frac{\partial}{\partial z}(A_ia_i)\right)\lambda = 0\,, \\ A_ic_i\lambda_y - A_ib_i\lambda_z + \left(\frac{\partial}{\partial y}(A_ic_i) - \frac{\partial}{\partial z}(A_ib_i)\right)\lambda = 0\,. \end{aligned}\right\} \; i = 1,2,3,4\,.$$

Diese 12 Differentialgleichungen für λ reduzieren sich wegen (2) und (4) nur auf 5 linear unabhängige Differentialgleichungen; deshalb müssen 2 Beziehungen zwischen a_i, b_i, c_i nach Elimination von λ_x, λ_y, λ_z bestehen, die man auch in der Form schreiben kann:

$$W_1 = \begin{vmatrix} A_1 b_1 & -A_1 a_1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x}(A_1 b_1) - \frac{\partial}{\partial y}(A_1 a_1) \\ A_3 c_3 & 0 & -A_3 a_3 & \frac{\partial}{\partial x}(A_3 c_3) - \frac{\partial}{\partial z}(A_3 a_3) \\ 0 & A_1 c_1 & -A_1 b_1 & \frac{\partial}{\partial y}(A_1 c_1) - \frac{\partial}{\partial z}(A_1 b_1) \\ 0 & A_3 c_3 & -A_3 b_3 & \frac{\partial}{\partial y}(A_3 c_3) - \frac{\partial}{\partial z}(A_3 b_3) \end{vmatrix} = 0,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} A_2 b_2 & -A_2 a_1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x}(A_2 b_2) - \frac{\partial}{\partial y}(A_2 a_2) \\ A_2 c_2 & 0 & -A_2 a_2 & \frac{\partial}{\partial x}(A_2 c_2) - \frac{\partial}{\partial z}(A_2 a_2) \\ A_3 c_3 & 0 & -A_3 a_3 & \frac{\partial}{\partial x}(A_3 c_3) - \frac{\partial}{\partial z}(A_3 a_3) \\ 0 & A_3 c_3 & -A_3 b_3 & \frac{\partial}{\partial y}(A_3 c_3) - \frac{\partial}{\partial z}(A_3 b_3) \end{vmatrix} = 0,$$

wenn $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $c_3 \neq 0$ angenommen werden. Wir wollen zeigen, dass das Verschwinden von W_1 und W_2 die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Sauersche Zellteilung des Raumes durch die Integralflächen der Differentialgleichungen (1) sind.

Transformiert man drei Scharen der Integralflächen in die Ebenenscharen so, dass:

$$\bar{a}_1 = \bar{c}_1 = \bar{b}_2 = \bar{c}_2 = \bar{a}_3 = \bar{b}_3 = 0,$$

so erhält man:

$$\bar{W}_1 = \bar{b}_1^4 \bar{a}_2^4 \bar{c}_3^4 \bar{b}_4 \bar{c}_4 (\bar{b}_4 \bar{c}_{4\bar{x}} - \bar{c}_4 \bar{b}_{4\bar{x}}),$$

$$\bar{W}_2 = \bar{b}_1^4 \bar{a}_2^4 \bar{c}_3^4 \bar{a}_4 \bar{c}_4 (\bar{a}_4 \bar{c}_{4\bar{x}} - \bar{c}_4 \bar{a}_{4x}).$$

Das Verschwinden von $\bar{W}_1$ und $\bar{W}_2$ gibt in diesem Falle schon die hinreichenden Bedingungen für die Sauersche Zellteilung des Raumes; denn man erhält mit Berücksichtigung von (2) aus den Gleichnungen

$$\bar{b}_4 \bar{c}_{4\bar{x}} - \bar{c}_4 \bar{b}_{4\bar{x}} = 0, \quad \bar{a}_4 \bar{c}_{4\bar{y}} - \bar{c}_4 \bar{a}_{4\bar{y}} = 0, \quad \bar{a}_4 \bar{b}_{4\bar{z}} - \bar{a}_{4\bar{z}} \bar{b}_4 = 0$$

die vierte Flächenschar:

$$f(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}) + \psi(\bar{z}) = C\,,$$

die wirklich zusammen mit den betrachteten Ebenenscharen die Sauersche Zellteilung des Raumes erzeugt.

Die Sauersche Zellteilung des Raumes ist aber invariant gegen jede beliebige Punkttransformation; um nun zu zeigen, dass das Verschwinden von W_1 und W_2 hinreichend für die Sauersche Zellteilung des Raumes durch die Integralflächen der Differentialgleichungen (1) ist, genügt es deshalb, bewiesen zu haben, dass das Verschwinden von W_1 und W_2 auch das Verschwinden von $\overline{W}_1$ und $\overline{W}_2$ verlangt.

Führt man in die Gleichungen (1) neue Veränderliche durch die Gleichungen

$$(5)\quad x = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\quad y = \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\quad z = \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

ein, so erhält man:

$$(6)\quad \begin{cases} \bar{a}_i = a_i f_{\bar{x}} + b_i \varphi_{\bar{x}} + c_i \psi_{\bar{x}}\,, \\ \bar{b}_i = a_i f_{\bar{y}} + b_i \varphi_{\bar{y}} + c_i \psi_{\bar{y}}\,, \\ \bar{c}_i = a_i f_{\bar{z}} + b_i \varphi_{\bar{z}} + c_i \psi_{\bar{z}}\,, \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

wobei $\bar{a}_1 = \bar{c}_1 = \bar{b}_2 = \bar{c}_2 = \bar{a}_3 = \bar{b}_3 = 0$ sind. Bezeichnet man die Funktionaldeterminante der Transformation (5) durch D und die Subdeterminante von $f_{\bar{x}}$, $\varphi_{\bar{x}}$, $\psi_{\bar{x}}$ durch $F_{\bar{x}}$, $\Phi_{\bar{x}}$, $\Psi_{\bar{x}}$ (entsprechend auch die Subdeterminanten der übrigen Glieder), so erhält man aus den Gleichungen (6):

$$(7)\quad \begin{cases} a_1 = F_{\bar{y}}\,\bar{b}_1\,, & b_1 = \Phi_{\bar{y}}\,\bar{b}_1\,, & c_1 = \Psi_{\bar{y}}\,\bar{b}_1\,, \\ a_2 = F_{\bar{x}}\,\bar{a}_2\,, & b_2 = \Phi_{\bar{x}}\,\bar{a}_2\,, & c_2 = \Psi_{\bar{x}}\,\bar{a}_2\,, \\ a_3 = F_{\bar{z}}\,\bar{c}_3\,, & b_3 = \Phi_{\bar{z}}\,\bar{c}_3\,, & c_3 = \Psi_{\bar{z}}\,\bar{c}_3\,. \end{cases}$$

und:

$$A_1 = \frac{\bar{A}_1}{D} = -\frac{\bar{b}_4\,\bar{a}_2\,\bar{c}_3}{D},\quad A_2 = \frac{\bar{A}_2}{D} = -\frac{\bar{a}_4\,\bar{b}_1\,\bar{c}_3}{D},\quad A_3 = \frac{\bar{A}_3}{D} = -\frac{\bar{a}_2\,\bar{b}_1\,\bar{c}_4}{D}$$

Um die Ableitungen nach x, y, z in W_1 und W_2 durch die Ableitungen nach $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ darzustellen, benützen wir die Beziehungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{D}\left(F_{\bar{x}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}}+F_{\bar{y}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{y}}+F_{\bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{D}\left(\Phi_{\bar{x}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}}+\Phi_{\bar{y}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{y}}+\Phi_{\bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{D}\left(\Psi_{\bar{x}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}}+\Psi_{\bar{y}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{y}}+\Psi_{\bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right),$$

wo $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ die Differentiation einer beliebigen Funktion nach x, y, z, bzw. $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ bedeutet. Mit Hilfe der Determinanteneigenschaften:

$$(8)\quad \begin{cases} F_{\bar{x}}\,\Phi_{\bar{y}} - F_{\bar{y}}\,\Phi_{\bar{x}} = \psi_z D\,, \\ F_{\bar{x}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\Phi_{\bar{y}}) + F_{\bar{y}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\Phi_{\bar{y}}) + F_{\bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\Phi_{\bar{y}}) - \\ -\Phi_{\bar{x}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(F_{\bar{y}}) - \Phi_{\bar{y}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{y}}(F_{\bar{y}}) - \Phi_{\bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(F_{\bar{y}}) = \\ = \psi_{\bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(D) - \psi_{\bar{x}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(D) \end{cases}$$

kann man leicht die Beziehungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}(A_1 b_1 D) - \frac{\partial}{\partial y}(A_1 a_1 D) = \frac{1}{D}\left(\psi_{\bar{x}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(k\bar{b}_4) - \psi_{\bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(k\bar{b}_4)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(A_3 c_3 D) - \frac{\partial}{\partial z}(A_3 a_3 D) = \frac{1}{D}\left(\varphi_{\bar{x}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{y}}(k\bar{c}_4) - \psi_{\bar{y}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(k\bar{c}_4)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(A_1 c_1 D) - \frac{\partial}{\partial z}(A_1 b_1 D) = \frac{1}{D}\left(f_{\bar{x}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(k\bar{b}_4) - f_{\bar{z}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(k\bar{b}_4)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(A_3 c_3 D) - \frac{\partial}{\partial z}(A_3 b_3 D) = \frac{1}{D}\left(f_{\bar{y}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(k\bar{c}_4) - f_{\bar{x}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{y}}(k\bar{c}_4)\right)$$

erhalten, wobei $k = \bar{b}_1\,\bar{a}_2\,\bar{c}_3$ ist. Da man W_1 in der Form

$$\begin{vmatrix} A_1 b_1 & -A_1 a_1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x}(A_1 b_1 D) - \frac{\partial}{\partial y}(A_1 a_1 D) \\ A_3 c_3 & 0 & -A_3 a_3 \frac{\partial}{\partial x}(A_3 c_3 D) - \frac{\partial}{\partial z}(A_3 a_3 D) \\ 0 & A_1 c_1 & -A_1 b_1 \frac{\partial}{\partial y}(A_1 c_1 D) - \frac{\partial}{\partial z}(A_1 b_1 D) \\ 0 & A_3 c_3 & -A_3 c_3 \frac{\partial}{\partial y}(A_3 c_3 D) - \frac{\partial}{\partial z}(A_3 b_3 D) \end{vmatrix}$$

schreiben kann, so findet man mit Berücksichtigung von (7), und (8):

$$W_1 = \frac{k^3}{D^8} \begin{vmatrix} \bar{b}_4 \Phi_{\bar{y}} & \bar{b}_4 F_{\bar{y}} & 0 & \psi_{\bar{x}} \frac{\bar{\partial}}{\partial z}(k\bar{b}_4) - \psi_{\bar{z}} \frac{\bar{\partial}}{\partial x}(k\bar{b}_4) \\ \bar{c}_4 \Psi_{\bar{z}} & 0 & \bar{c}_4 F_{\bar{z}} & \varphi_{\bar{x}} \frac{\partial}{\partial y}(k\bar{c}_4) - \varphi_{\bar{y}} \frac{\partial}{\partial x}(k\bar{c}_4) \\ 0 & \bar{b}_4 \Psi_{\bar{y}} & \bar{b}_4 \Phi_{\bar{y}} & f_{\bar{x}} \frac{\partial}{\partial z}(k\bar{b}_4) - f_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial x}(k\bar{b}_4) \\ 0 & \bar{c}_4 \Psi_{\bar{z}} & \bar{c}_4 \Phi_{\bar{z}} & f_{\bar{y}} \frac{\partial}{\partial x}(k\bar{c}_4) - f_{\bar{x}} \frac{\partial}{\partial y}(k\bar{c}_4) \end{vmatrix}$$

und daher:

$$W_1 = \frac{\Phi_y \Psi_z}{D^7} k^4 \bar{b}_4 \bar{c}_4 (\bar{b}_4 \bar{c}_{4\bar{x}} - c_4 \bar{b}_{4\bar{x}})$$

oder:

$$\text{(9a)} \qquad \frac{W_1}{b_1 c_3} = \frac{1}{D^5} \frac{\overline{W}_1}{\bar{b}_1 \bar{c}_3} .$$

Analog erhält man:

$$\text{(9b)} \qquad \frac{W_2}{a_2 c_3} = \frac{1}{D^5} \frac{\overline{W}_2}{\bar{a}_2 \bar{c}_3} .$$

Aus den Formeln (9a) und (9b) sehen wir, dass das Verschwinden von W_1 bzw. W_2 wirklich auch das Verschwinden von $\overline{W}_1$ bzw. W_2 verlangt.

Die Formeln (9a) und (9b) gelten aber auch allgemein bei beliebiger Punkttransformation, was man durch eine weitere Transformation der Ebenenscharen in beliebige Flächenscharen, ähnlich wie in § 3 leicht erhalten kann.

Bezeichnet man:

$$\frac{W_1}{b_1 c_3} = U_1 , \quad \frac{W_2}{a_2 c_3} = U_2 ,$$

so kann man die Formeln (9a) und (9b) in der Form:

$$U_1 = \frac{\overline{U}_1}{D^5} , \quad U_2 = \frac{\overline{U}_2}{D^5}$$

schreiben, woraus sich ergibt, dass die dreifachen Integrale

$$\int\int\int (U_1)^{\frac{1}{5}} dxdydz , \quad \int\int\int (U_2)^{\frac{1}{5}} dxdydz ,$$

erstreckt über einen beliebigen Bereich der Werte x, y, z invariant gegen jede beliebige Punkttransformation bleiben.

Um die geometrische Deutung für U_1 und U_2 zu bekommen, verfahren wir ebenso, wie im vorhergehenden Paragraphen, d. h. wollen wir zuerst in dem speziellen Falle, wo 3 Flächenscharen aus den parallelen zu den Koordinatenebenen gebildet sind, die geometrische Deutung für U_1 und U_2 erhalten, um dann nachher die Deutung dieses speziellen Falles auf den allgemeinen zu übertragen.

Wir legen durch einen beliebigen Punkt drei aufeinander senkrechte Ebenen (die als Koordinatenebenen angenommen sind) und geben x den Zuwachs Δx. Durch den Punkt a $(\Delta x, 0, 0)$ legen wir eine Fläche E_1 von der vierten Flächenschar, welche die Y — Achse im Punkte $d(0, \Delta y, 0)$ und die Z — Achse im Punkte $c(0, 0, \Delta z)$ schneidet. Jetzt haben wir 3 neue Punkte: $d(\Delta x, \Delta y, 0)$, $e(0, \Delta y, \Delta z)$ und $f(\Delta x, 0, \Delta z)$. Legt man durch d eine andere Fläche E_2 von der vierten Flächenschar, die allgemein (wenn die 3 Ebenenscharen zusammen mit der vierten Flächenschar nicht eine Sauersche Zellteilung des Raumes bilden) nicht durch den Punkt e und f hindurchgeht; auf diese Weise erhält man, wie man aus der Figur (2) ersieht, zwei Dreiecke kfg und lhe.

Wir wollen nun die Beziehung zwischen dem Inhalte des Dreieckes kfg bzw. lhe und U_1 bzw. U_2 aufstellen.

Bezeichnet man den Inhalt des Dreieckes kfg bzw. lhe durch S_1 bzw. S_2, so erhält man:

$$(11)\qquad \begin{cases} S_1 = \frac{1}{2}(\Delta_1 z - \Delta z)\Delta_1 y, \\ S_2 = \frac{1}{2}(\Delta_2 z - \Delta z)\Delta_1 x, \end{cases}$$

wenn man von den Gliedern höherer Ordnung absieht. Um

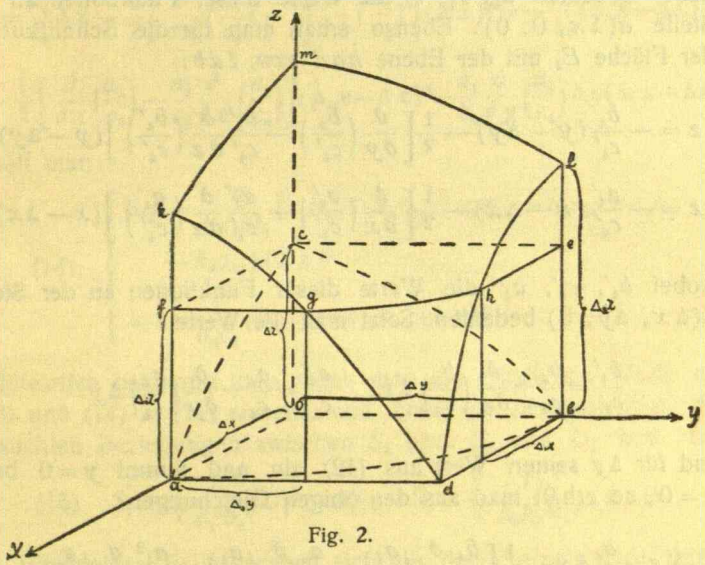


Fig. 2.

Δz, $\Delta_1 z$, $\Delta_2 z$, $\Delta_1 y$, $\Delta_1 x$ durch Δx auszudrücken, berechne man aus der Gleichung:

$$a_4 dx + b_4 dy + c_4 dz = 0$$

für die Schnittkurve der Fläche E_1 mit der $X0Z$ Ebene:

$$z = -\frac{a_4}{c_4}(x - \Delta x) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_4}{c_4}\right) - \frac{a_4}{c_4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a_4}{c_4}\right)\right](x - \Delta x)^2$$

und für die Schnittkurve der Fläche E_1 mit der $X0Y$ Ebene:

$$y = -\frac{a_4}{b_4}(x - \Delta x) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_4}{b_4}\right) - \frac{a_4}{b_4}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_4}{b_4}\right)\right](x - \Delta x)^2,$$

woraus für $x = 0$ sich ergibt:

$$\Delta z = \frac{a_4}{c_4}\Delta x - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_4}{c_4}\right) - \frac{a_4}{c_4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a_4}{c_4}\right)\right](\Delta x)^2,$$

$$\Delta y = \frac{a_4}{b_4}\Delta x - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_4}{b_4}\right) - \frac{a_4}{b_4}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_4}{b_4}\right)\right](\Delta x)^2;$$

dabei dedeuten a_4, b_4, c_4 die Werte dieser Funktionen an der Stelle $a(\Delta x, 0, 0)$. Ebenso erhält man für die Schnittkurven der Fläche E_2 mit der Ebene kad bzw. ldb:

$$z = -\frac{b_4'}{c_4'}(y - \Delta y) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_4'}{c_4'}\right) - \frac{b_4'}{c_4'}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b_4'}{c_4'}\right)\right](y - \Delta y)^2,$$

$$z = -\frac{a_4'}{c_4'}(x - \Delta x) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_4'}{c_4'}\right) - \frac{a_4'}{c_4'}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a_4'}{c_4'}\right)\right](x - \Delta x)^2,$$

wobei b_4', c_4', a_4' die Werte dieser Funktionen an der Stelle $d(\Delta x, \Delta y, 0)$ bedeuten. Setzt man die Werte

$$\frac{b_4'}{c_4'} = \frac{b_4}{c_4} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_4}{c_4}\right)\Delta y, \quad \frac{a_4'}{c_4'} = \frac{a_4}{c_4} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_4}{c_4}\right)\Delta y$$

und für Δy seinen Wert aus (12) ein und nimmt $y = 0$ bzw. $x = 0$, so erhält man aus den obigen Gleichungen:

$$\Delta_1 z = \frac{a_4}{c_4}\Delta x - \frac{1}{2}\left[\frac{b_4}{c_4}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_4}{b_4}\right) - \frac{a_4}{c_4}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_4}{b_4}\right) - \frac{a_4^2}{b_4^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_4}{b_4}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{a_4^2}{b_4 c_4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b_4}{c_4}\right)\right](\Delta x)^2$$

$$\Delta_2 z = \frac{a_4}{c_4}\Delta x - \frac{1}{2}\left[-2\frac{a_4}{b_4}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_4}{c_4}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_4}{c_4}\right) - \frac{a_4}{c_4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a_4}{c_4}\right)\right](\Delta x)^2;$$

also:

$$(13)\quad \begin{cases} \Delta_1 z - \Delta z = \dfrac{1}{2}\dfrac{a_4}{c_4 b_4}(c_4 b_{4x} - b_4 c_{4x} + c_4 a_{4y} - a_4 c_{4y} + \\ \qquad + a_4 b_{4z} - b_4 a_{4z})(\Delta x)^2, \\ \Delta_2 z - \Delta z = \dfrac{a_4}{b_4 c_4}(a_{4y} c_4 - a_4 c_{4y})(\Delta x)^2. \end{cases}$$

Es bleibt noch übrig, $\Delta_1 y$ bzw. $\Delta_1 x$ durch Δx auszudrücken. Aus der Gleichung:

$$\Delta z = \frac{a_4}{c_4}\Delta x - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_4}{c_4}\right) - \frac{a_4}{c_4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a_4}{c_4}\right)\right](\Delta x)^2 = -\frac{b_4}{c_4}(\Delta_1 y - \Delta y) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_4}{c_4}\right) - \frac{b_4}{c_4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b_4}{c_4}\right)\right](\Delta_1 y - \Delta y)^2 - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_4}{c_4}\right)\Delta y(\Delta_1 y - \Delta y)$$

bzw.:

$$\Delta z = \frac{a_4}{c_4}\Delta x - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_4}{c_4}\right) - \frac{a_4}{c_4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a_4}{c_4}\right)\right](\Delta x)^2 = -\frac{a_4}{c_4}(\Delta_1 x - \Delta x) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_4}{c_4}\right) - \frac{a_4}{c_4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a_4}{c_4}\right)\right](\Delta_1 x - \Delta x)^2 - \frac{a_4}{b_4}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_4}{c_4}\right)\Delta x(\Delta_1 x - \Delta x)$$

erhält man:

$$(14)\quad \begin{cases} \Delta_1 y = \dfrac{1}{2}\dfrac{a_4}{c_4 b_4^2}(c_4 b_{4x} - b_4 c_{4x} + c_4 a_{4y} - a_4 c_{4y} + a_4 b_{4z} - \\ \qquad - b_4 a_{4z})(\Delta x)^2, \\ \Delta_1 x = \dfrac{1}{b_4 c_4}(a_{4y} c_4 - c_{4y} a_4)(\Delta x)^2. \end{cases}$$

Schliesslich bekommt man, wenn man die erhaltenen Werte aus (13) und (14) in (11) einsetzt und noch (2) berücksichtigt, die gesuchten Beziehungen zwischen S_1 bzw. S_2 und U_1 bzw. U_2:

$$(15)\quad S_1 = \frac{1}{2}\frac{a_4^2}{c_4^5 b_4^5} U_1^2 (\Delta x)^4, \quad S_2 = \frac{1}{2}\frac{U_2^2}{a_4 b_4^2 c_4^5}(\Delta x)^4.$$

Im allgemeinen Falle ergeben sich aus den Formeln (15) durch beliebige Punkttransformation bei Berücksichtigung von (10):

$$S_1 = L_1 U_1^2 (\Delta x)^4, \qquad S_2 = L_2 U_2^2 (\Delta x)^4,$$

wobei S_1 bzw. S_2 den Inhalt des transformierten Dreieckes kfg bzw. lhe und L_1, L_2 gewisse Funktionen der Koeffizienten der Differentialgleichungen (1) bedeuten.

Wie man aus der Figur (2) sieht, kann man durch Vertauschung des Punktes d mit f bzw. e und der Flächenscharen noch 22 ähnliche Dreiecke erhalten; ebensovielen entsprechen Invarianten, die man aus (10a) durch Vertauschung der Indizes und der a, b, c erhalten kann.

Garbės prof. A. Dambrauskas.

Apie sukrautines stačiakampes trigonometrijos sistemas.

(Ueber zussammengesetzte rechtwinklige trigonometrische Systeme).
(Schluss).

(Dedama pasiulius prof. *O. Volkui*).

VII.

Praeitame straipsny [1]) mes esam parodę, kaip bet kuriai trigonometrijos sistemai tipo $S\varphi = \frac{\pi}{2}$ surandama trys ją charakterizuojančios kreivės (sinusalė, tangensalė ir kontangensalė). Nūn kyla savaime atvirkščias klausimas: turint bet kurią algebriškąją kreivę, surasti atsakomos jai stačiakampės trigonometriškosios sistemos.

Naujoj praplatintoj savo brošiūroj (Naujos trigonometriškos sistemos, Berlynas, 1922 63 — 67 psl.) mes esam bandę nurodyti kelią šiam klausimui bendrai išspręsti. Stačiakampėse trigonometriškose sistemose jis išsprendžiamas dar lengviau. Nes remiantis praeitame straipsny išvestomis lygybėmis (3), (4) ir (5) [2])

[1]) Sk. Liet. Univ. Matemat.-Gamtos Fakulteto Darbų 1924—1926, 397—425 psl.

[2]) Kadangi jos šiame tyrinėjime yra pamatinės ir į jas teks toliau kreiptis, tatai tariamės, būsiant ne pro šalį, jas čia pakartojus: štai jos:

(3) punkto S koordinatoms:

$$\begin{cases} x = c \\ y = s \\ \sqrt{x^2+y^2} = r \\ \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2} = t \\ \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2} = k \\ \frac{x^2+y^2}{x} = z \\ \frac{x^2+y^2}{y} = q \end{cases}$$

(4) punkto T koordinatoms:

$$\begin{cases} x = r \\ y = t \\ \sqrt{x^2+y^2} = z \\ \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2} = q \\ \frac{x^2}{y} = k \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = s \\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = c \end{cases}$$

(5) punkto Q koordinatoms:

$$\begin{cases} y = r \\ x = k \\ \sqrt{x^2+y^2} = q \\ \frac{y^2}{x} = t \\ \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2} = z \\ \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = s \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = c \end{cases}$$

duotosios kreivės lyginys (lygtis) lengvai pakeičiama trigonometriškų funkcijų lyginiais, kuriuos išgvaldžius, ir surandama atasakančios duotajai kreivei stačiakampės trigonometriškos sistemos Geriau tai paaiškės iš pavyzdžių.

Tesie kreivė išreikšta lyginiu (lygtimi):

(84) $$x(x^2+y^2)=2ay^2$$

Yra tai Dioklo cisoida. Norint sužinoti, kuriai trigonometriškai sistemai tipo $S\varphi=\frac{\pi}{2}$ ji atsako, reikia pirmiausia nustatyti, kas yra duotoji kreivė ieškamąjai sistemai: sinusalė, tangensalė, ar kotangensalė, nes vienoj sistemoj ta pati kreivė gali būti sinusalė, antroj — tangensalė. trečioj — kotangensalė.

Iš čia matome, kad duotajai kreivei gali atsakyti n e v i e n a, b e t m a ž i a u s i a t r y s trigonometriškos sistemos.

Tai pažymėję, pažiūrėkim nūn, kurios sistemos atsako Dioklo cisoidai. Tam tikslui cisoidos lyginy (84) koordinatas x, y pakeiskim joms atsakančiomis trigonometriškomis funkcijomis, imdami jas iš mūsų pirmame straipsny nustatytų ir čia aukščiau prieraše pakartotų (3), (4) ir (5) lygybių.

Tuomet iš vieno cisoidos (84) lyginio gausime šiuos tris naujus:

(85) $$cr^2=2as^2$$

(86) $$rz^2=2at^2$$

(87) $$kq^2=2ar^2$$

Lyginys (85) atsako cisoidai, kaipo ieškomosios sistemos sinusalei, lyg. (86) atsako jai, kaipo ieškomosios sistemos tangensalei ir lyg. (87) atsako jai, kaipo ieškomosios sistemos kotangensalei.

Iš lyginių (85), (86), ir (87) gauname:

(85)′ $$\frac{cr^2}{s^2}=\frac{cr^2}{r^2-c^2}=\frac{cz}{z-c}=q\frac{c}{s}=\ldots=2a$$

(86)′ $$\frac{rz^2}{t^2}=\frac{rz^2}{z^2-r^2}=\frac{r^3}{s^2}=\frac{q^2}{r}=\ldots=2a$$

$$(87)' \quad \frac{kq^2}{r^2} = k\frac{r^2}{s^2} = c\frac{r^3}{s^3} = \frac{kq}{s} = \ldots\ldots = 2a$$

Lyginiai (85)′, (86)′, (87)′ parodo, kad cisoidai

kaipo sinusalei atsako sistemos:

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{c\frac{r^2}{s^2}=2a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{c\frac{q}{s}=2a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{cz}{z-c}=2a}, \ldots$$

kaipo tangensalei — sistemos:

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r\frac{z^2}{t^2}=2a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{q^2}{r}=2a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{r^3}{s^2}=2a}, \ldots$$

kaipo kotangensalei — sistemos:

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{k\frac{q^2}{r^2}=2a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{k\frac{r^2}{s^2}=2a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{k\frac{q}{s}=2a}, \ldots$$

Kaip matome, tų sistemų yra daug ir jos nevienodos. Tačiau jos visos veda į tą pačią cisoidą, kaip tuo pigu įsitikinti, pakeičiant lyginiuose (85)′, (86)′, (87)′ trigonometriskąsias funkcijas joms atsakančiais koordinatų reiškiniais, imtais iš (3), (4) ir (5) lygybių.

Be to lygybės (85)′, (86)′, (87)′ parodo, kad cisoidoj, kaipo aukščiau pažymėtųjų sistemų apibūdinamoj kreivėj, esama dar šių santykių:

$$(85)'' \quad \frac{s^2}{r^2} = \frac{c}{2a}; \quad \frac{z-c}{c} = \frac{z}{2a}; \quad \frac{s}{c} = \frac{q}{2a}; \ldots$$

$$(86)'' \quad \frac{t^2}{z^2} = \frac{r}{2a}; \quad \frac{s^2}{r^2} = \frac{r}{2a}; \quad \frac{r}{q} = \frac{q}{2a}; \ldots$$

$$(87)'' \quad \frac{s^2}{r^2} = \frac{k}{2a}; \quad \frac{s^3}{r^3} = \frac{c}{2a}; \quad \frac{s}{k} = \frac{q}{2a}; \ldots$$

Šie santykiai parodo naujas cisoidos ypatybes ir kai kurie iš jų gali teikti naujų būdų tai kreivei nubrėžti.

Panašiai rasime, jog

(88) $(x^2+y^2)^2=ax^2y$ dvilapei atsako sistemos:

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{z^2}{s}=a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{z^3}{sr}=a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r\frac{q^2}{c^2}=a}, \ldots$$

(89) $(x^2+y^2)^3=a^2x^4$ dvikiaušei — sistemos:

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{z^2}{r}=a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{z^2}{c}=a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{z^2}{s}=a}, \ldots$$

(90) $(x^2+y^2)^3=a^2x^2y^2$ keturlapei — sistemos:

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{zr}{s}=a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{z^2}{s}=a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{q^2}{c}=a}, \ldots$$

(91) $(x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2)$ kardioidai — sistemos:

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{r}{c}(r-2a)=2a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{z}{r}(z-2a)=2a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{q}{k}(q-2a)=2a}, \ldots$$

(92) $x(x^2+y^2)=a(y^2-3x^2)$ Makloreno trieks-trisei—

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{r^2}{c^2}(a-c)=4a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{z^2}{r^2}(a-r)=4a}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{q^2}{k^2}(a-k)=4a}, \ldots$$

(93) $(x-a)^2(x^2+y^2)=bx^2$ Nikomedo konchoidai—

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{r}{c}(c-a)=\sqrt{b}}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{z}{r}(r-a)=\sqrt{b}}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{q}{k}(k-a)=\sqrt{b}}, \ldots$$

(94) $a(x-a)(x^2+y^2)=bx^2$ Sluzės konchoidai —

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{r^2}{c^2}(c-a)=\frac{b}{a}}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{z^2}{r^2}(r-a)=\frac{b}{a}} \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{q^2}{k^2}(k-a)=\frac{b}{a}}, \ldots$$

(95) $xy^2=a(x+y)^2$ Rollės kreivei —

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{s}{c}(\sqrt{c}-\sqrt{a})=\sqrt{a}}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{t}{r}(\sqrt{r}-\sqrt{a})=\sqrt{a}}, \quad S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{r}{k}(\sqrt{k}-\sqrt{a})=\sqrt{a}},$$

ir t.t. ir t.t.

Iš čia matome, kad ieškojimas turimoms kreivėms atsakomų stačiakampių trigonometriškų sistemų gali atvesti į labai įdomius rezultatus. Pav. iš aukščiau paduotų atsakomybių randame, kad sistema $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{z^2}{s}=a}$ atsako dvilapei, kaipo sinusalei, keturlapei, kaipo tangesalei ir dvikiaušei, kaipo kotangensalei.

Be to kreivėms atsakomų sistemų sąlygos duodasi išreiškiamos daug lengviau išgvildomais lyginiais, negu pačių kreivių lyginiai. Todel kreivių ypatybės dažnai lengviau susekti iš joms atsakančių sistemų, negu tiesiog iš kreivių lyginių, nes klausimus, surištus su aukštesniųjų laipsnių lyginių gvaldymu, gali padaryti žymiai lengvesnius, suvesdamas juos prie 1-jo bei 2-jo laipsnio lyginių išsprendimo.

VIII.

Išdėtas aukščiau stačiakampių trigon. sistemų pritaikymas analitiškai geometrijai veda netik į pažinimą naujų žinomose jau kreivėse ypatybių, bet taipogi ir prie naujo bendro metodo — iš kiekvienos turimos algebriškos kreivės gauti po tris naujas kreives, kurios galima pavadinti išvestinėmis. Jų lyginiams surasti užtenka padaryti iš anksto bet kuris iš šių trijų prileidimų:

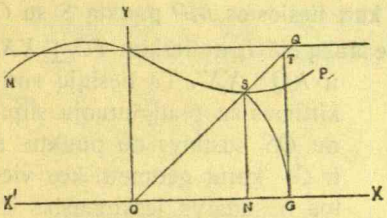
1) turimoji kreivė yra tam tikros stačiakampės sistemos sinusalė, ir ieškoma tos sistemos tangensalė ir kotangensalė

2) turimoji kreivė yra tam tikros stačiakampės sistemos tangensalė ir ieškoma tos sistemos sinusalė ir kotangensalė; ir

3) turimoji kreivė yra tam tikros stačiakampės sistemos kotangensalė ir ieškoma tos sistemos sinusalė ir tangensalė.

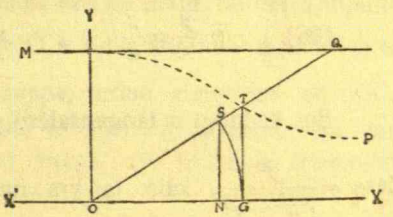
Šie trys klausimai, apskritai tariant, visada galima išspręsti, nes

1) jei turimoji algebriškoji kreivė MP (žiūr. 6 brež.), išreikštoji lyg. $f(x,y,a,b)=0$ yra sistemos $S\varphi=\frac{\pi}{2}$ sinusalė, tai, sujungę bet kokį kreivės punktą S su koordinatų pradžia O tiesiąja OS, visada galima stipinu OS nubrėžti lankas SG ir iš punkto G nutiesti tiesioji $TG \perp XX'$, liečianti lanką SG punkte G ir perkertanti prailgintąjį stipiną OS punkte T. Išvedę iš punkto K tiesiąją $KQ \parallel XX'$, gausime kitą persikirtimo punktą Q. Geometriškoji punkto T vieta duos mums ieškomąją išvestinę tangensalę, o geometriškoji punkto Q vieta — išvestinę kotangensalę.



Brėž. 6.

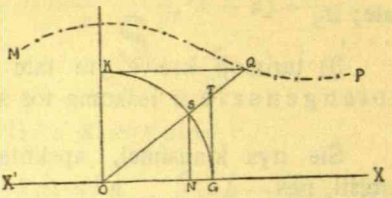
2) Jei turimoji kreivė MP yra tam tikros sistemos $S\varphi=\frac{\pi}{2}$ tangensalė, tai sujungus bet kurį jos punktą T su O ir iš T nuleidus perpendikulerą TG į XX', visada galima stipinu OG nubrėžti lankas SG, perkertąs tiesiąją OT punkte S (žiūr. 7brėž.). Išvedę iš punkto K tiesiąją $KQ \parallel XX'$, gausim antrą persikirtimo punktą Q. Geometriškoji punkto S vieta nubrėš ieškomąją išvestinę sinusalę, o geometriškoji punkto Q vieta — išvestinę kotangensalę.



Brėž. 7.

3) Pagalios jei turimoji kreivė MP yra tam tikros sistemos $S\varphi=\frac{\pi}{2}$ kotangensalė, tai iš bet kurio jos punkto Q nuleidę

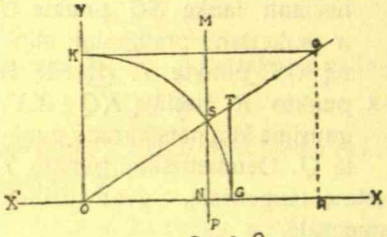
perpendikuterą KQ į OY, visada galėsime stipinu OK nubrėžti lanką KG, perkertantį stipiną OQ punkte S. Išvedę iš punkto G tiesiąją $TG \perp XX'$, rasim ir antrą persikirtimo punktą T (žiūr. 8 brėž.). Geometriškoji punkto S vieta duos išvestinę sinusalę, o geometriškoji punkto T vieta — išvestinę tangensalę.



Brėž. 8.

Šią bendrą teoriją, tariamės, pravartu bus paaiškinus keleriais konkrečiais pavyzdžiais.

1. Tesie tiesioji MP, išreikšta lyg. $x = a$, tam tikros sistemos $S\varphi = \frac{\pi}{2}$ sinusalė. Sujungę bet kurį tiesiosios MP punktą S su O tiesiaja OS ir stipinu OS, nubrėžę lanką KSG, nutieskim $TG \perp XX'$ ir $KQ \parallel XX'$. Tų tiesiųjų susikirtimas su prailgintuoju stipinu OS nustatys du punktu T ir Q, kurių geometriškos vietos ir sudarys ieškomąsias išvestines — tangensalę ir kotangensalę. Jų lyginiai lengvai surandama, nes iš brėžinio sąlygų (žiūr. 9 brėž.) turim:



Brėž. 9.

$$\frac{TG}{OG} = \frac{SN}{ON} \quad \text{ir} \quad \frac{QR}{OR} = \frac{SN}{ON}, \text{ arba}$$

$$(96) \qquad \frac{y}{x} = \frac{s}{a} \quad , \quad \frac{y}{x} = \frac{s}{a}$$

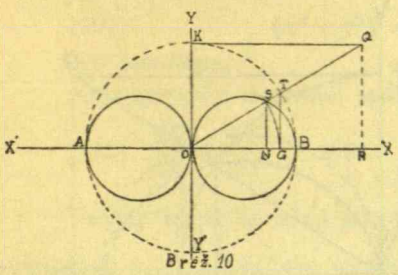
Bet kadangi s tangensalėse yra $= \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, o kotangensalėse $= \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, kaip tai yra nustatyta lygybėse (4) ir (5), tat įstatę tuos reiškinius į lyg. (96), rasim:

$$(97) \quad a\sqrt{x^2+y^2} = x^2 \quad \text{ir} \quad a\sqrt{x^2+y^2} = xy, \text{ arba}$$

$$(97)' \quad y = \pm\frac{x}{a}\sqrt{x^2-a^2} \quad , \quad y = \pm\frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad ,$$

Taigi tiesiosios $x = a$ išvestinės bus 4 laipsnio hiperbolė ir kryžinė.

2. Tesie tam tikros sistemos $S\varphi = \frac{\pi}{2}$ tangensalė ratilas, išreikštas lyg.: $x^2+y^2=a^2$. Sujungę bet kurį jo punktą T su O tiesiąja OT, vedame $TG \perp XX'$ ir $KQ \parallel XX'$. Stipinu OG brėžiam lanką GS, kurs perkirs stipiną OT punkte S, o tiesioji KQ perkirs stip. OT — punkte Q. Punktų S ir Q geometriškųjų vietų lyginiams surasti, iš brėžimo sąlygų (ž. 10 brėž.) turime:



Brėž. 10

$$\frac{OS}{OT}=\frac{ON}{OG} \text{ ir } \frac{OQ}{OR}=\frac{OT}{OG}\ ;\quad OG^2=OS^2=OB.ON=ac.$$

arba

$$(98)\quad \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ ir } \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{a}{\sqrt{ac}}$$

Iš čia žinodami iš (5), jog kotangensalėse $c=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, galutinai rasime:

$$(99)\qquad x^2+y^2=ax \text{ ir } y\sqrt{x^2+y^2}=ax$$

arba

$$(99)'\qquad y=\pm\sqrt{x(a-x)} \text{ ir } x=\frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

Vadinas, šiame atvejy išvestinė bus du ratilu, nubrėžtu stipinu $=\frac{a}{2}$, liečią vienas antrą punkte O ir ratilą stipinu $= a$ punktuose A ir B, o kotangensalė kreivė kappa, turinti simetrijos ašį XX'.

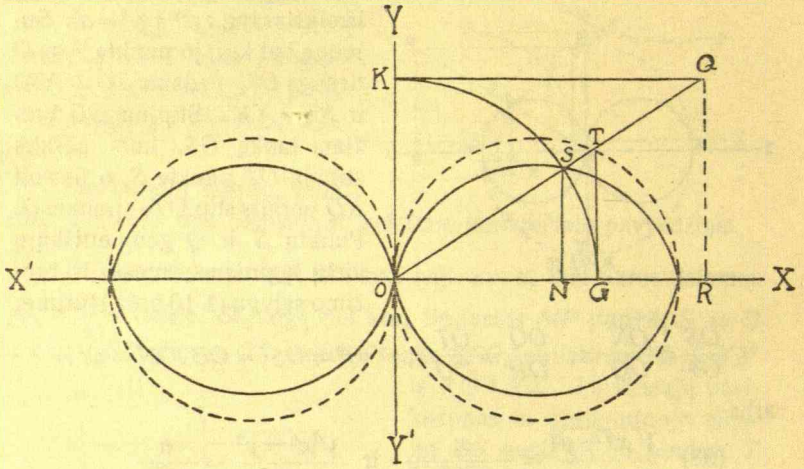
Jei paimtumėm tą pat ratilą $x^2+y^2=a^2$ kotangensale, tai gautumėm tuos pat du ratilu ir kappą, tik turinčius simetrijos ašį YY'.

3. Tesie tik ką gautuoju du ratilu $y=\pm\sqrt{x(a-x)}$ tam tikros $S\varphi=\frac{\pi}{2}$ sistemos tangensalė. Padarę panašų brėžimą, kaip aukščiau. iš 11 brėž. rasim:

$$\frac{OS}{OT}=\frac{ON}{OG} \text{ ir } \frac{OQ}{OT}=\frac{OR}{OG}\ ;\quad OG=OS=OK;\ OT^2=OB.OG;$$

arba

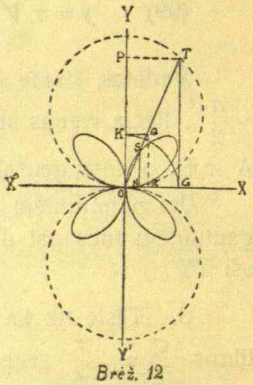
(100) galutinai: $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ir $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{ay}} = \frac{x}{y}$ arba



Brėž. 11.

(100)' $(x^2+y^2)^3 = a^2x^4$ ir $y(x^2+y^2) = ax^2$.

Tai reiškia, kad iš dviejų ratilų $y = \pm\sqrt{x(a-x)}$ išvestinės bus: sinusalė — dvikiaušė, o kotangensalė — tam tam tikra strofoida $x = \pm y\sqrt{\frac{y}{a-y}}$, turinti asimptotą, nustatytą lyginiu $y = a$.



Brėž. 12

4. Tesie tuodu pačiu ratilu

$$x = \pm\sqrt{y(a-y)},$$

tik pakreiptu stačiuoju kampu tam tikros stačiakampės sistemos tangensalė. Iš brėžimo sąlygų (žiūr. 12 brėž.) ir iš santykių sinusalėse turim

$$OT = z = \frac{x^2+y^2}{x}, \quad TG = t = \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Bet iš kitos šalies

$OT^2 = a \cdot OP = a \cdot TG = \frac{ay}{x}\sqrt{x^2+y^2}$, taigi sinusalei gauname lyginį:

(101) $$\sqrt{a\frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2+y^2}{x}$$

iš kur galutinai randame:

(101)′ $$(x^2+y^2)^3=a^2x^2y^2$$

Tai keturlapė.

Kotangensalei išvestinei surasti turime:

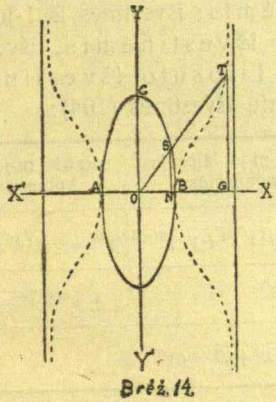
(102) $$\frac{QR}{OQ}=\frac{TG}{OT}\text{ , arba }\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{t}{\sqrt{at}}.$$

Pakėlę lyg (102) kvadratan ir žinodami iš (5), jog kotangensalėse $t=\frac{y^2}{x}$, galutinai rasime:

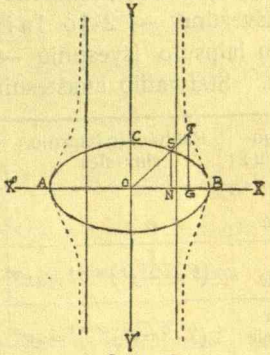
(102)′ $$x^2+y^2=ax\text{, arba }y=\pm\sqrt{x(a-x)}.$$

Tai reiškia, kad išvestinė kotangensalė šiam atvejy bus vėl tuo pat du ratilu, tik pasuktu kampu 90°.

4. Tesie elipsė pusašimis a, b tam tikros sistemos $S\ \varphi=\frac{\pi}{2}$ sinusalė. Padarykim joje atsakomus brėžimus, kaip aukščiau (žiūr. 8 ir 9 br.). Jei elipsėje $OB=a$, $OC=b$, tai josios lyginys bus



Brėž. 14.



Brėž. 13.

(103) $$\frac{ON^2}{a^2}+\frac{SN^2}{b^2}=1.$$

Bet kadangi iš (4) ir (5) tangensalėse $ON=c=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$SN=s=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, o kotangensalėse $ON=c=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$SN = s = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, todel įstatydami tuos reiškinius lyg. (103) vietoj ON ir SN, rasime šiuos tangensalės ir kotangensalės lyginius:

$$(103)' \quad \begin{cases} x^2(b^2x^2+a^2y^2) = a^2b^2(x^2+y^2) \text{ ir} \\ y^2(b^2x^2+a^2y^2) = a^2b^2(x^2+y^2). \end{cases}$$

Geometriškai jiems atsakys 4-jo laipsnio kreivės. Brėžiniuose 14 ir 15-tenubrėžtos tik vien tangensalės. Kotangensalės bus tos pat kreivės, tik pakreiptos kampu 90°. Tangensalės turi asimptotes nustatytas sąlyga $x = \pm b$, kotangesalės — turi irgi asimptotes, nustatytas sąlyga $y = \pm a$. Prie $a = b$ tos kreivės išsitiesia ir, susilieję su savo asimptotėmis, virsta tiesiomis, kaip tai ir turi būti ratile imtame sinusale.

Panašiu būdu iš kiekvienos kreivės bei tiesiosios, darant aukščiau nurodytąjį trigonometriškąjį brėžimą, lengvai galima gauti po dvi nauji išvestini kreivi, kuriedvi su duotaja linija sudarys tam tikrą giminingų linijų trejetą.

IX.

Išvestinės gautosios tiesiog iš duotosios kreivės galima pavadinti 1-jo laipsnio išvestinėmis; išvestinės iš 1-jo laipsnio išvestinių — 2-jo laipsnio išvestinėmis, išvestinės iš 2-jo laipsnio išvestinių — 3-jo laipsnio išvestinėmis ir t. t. Štai ratilo aukštesnių laipsnių išvestinės (104):

Ratilas trejopu atžvilgiu:	Ratilo m-jo laipsnio sinusalės	Ratilo m-jo laipsnio tangensalės:	Ratilo m-jo laipsnio kotangensalės:
Kaipo sinusalė		$x^m = \pm a(\sqrt{x^2+y^2})^{m-1}$	$y^m = \pm a(\sqrt{x^2+y^2})^{m-1}$
Kaipo tangensalė	$\pm(\sqrt{x^2+y^2})^{m+1} = ax^m$		$\pm y^m\sqrt{x^2+y^2} = ax^m$
Kaipo kotangensalė	$\pm(\sqrt{x^2+y^2})^{m+1} = ay^m$	$\pm x^m\sqrt{x^2+y^2} = ay^m$	

Iš šių formulų prie $m = 1, 2\ldots$ gaunama aukščiau išvestos formulos (97)′, (99)′, (100)′, (101)′, (102)′.

Ratilo m-jo laipsnio išvestinės prieita šiuo metodu:

1) ratilo, kaipo sinusalės, lyginin $f_1(x_1, y_1) = \sqrt{x_1^2+y_1^2} = a$ vieton punkto S koordinatų $x_1 = c, y_1 = s$ įstatyta iš (4) joms lygūs reiškiniai $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, išreikšti punkto T koordinatomis

x, y. Tuo keliu gauta nauja funkcija $t_1(x, y) = a$, kuri ir reiškia 1-jo laipsnio išvestinę tangensalę. Išvestinei kotangensalei gauti, ratilo, kaipo sinusalės, lyginin $f_1(x_1, y_1) = a$ punkto S koordinatų $x_1 = c, y_1 = s$ vieton įstatyta iš (5) lygūs joms reiškiniai $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, išreikšti punkto Q koordinatomis x, y. Gautoji tuo keliu nauja funkcija $k_1(x, y) = a$ ir reikš 1-jo laipsnio išvestinę kotangensalę.

2) Ratilo, kaipo tangensalės lyginin $f_2(x_2, y_2) = a$ vieton punkto T koordinatų $x_2 = r, y_2 = t$ įstatyta iš (3) lygūs joms reiškiniai $\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}$, išreikšti punkto S koordinatomis x, y. Tuo keliu gauta nauja funkcija $s_1(x, y) = a$, kuri ir reiškia 1-jo laipsnio išvestinę sinusalę. Išvestinei kotangensalei gauti ratilo, kaipo tangensalės lyginin $f_2(x_2, y_2) = a$ punkto T koordinatų $x_2 = r$, $y_2 = t$ vieton įstatyta iš (5) joms lygūs reiškiniai y, $\frac{y^2}{x}$, išreikšti punkto Q koordinatomis x, y. Gautoji nauja funkcija $k_2(x, y) = a$ ir reikš 1-jo laipsnio išvestinę kotangensalę.

3) Ratilo, kaipo kotangensalės, lyginin $f_3(x_3, y_3) = a$ vieton punkto Q koordinatų $x_3 = k, y_3 = r$ įstatyta iš (3) joms lygūs reiškiniai $\frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{x^2+y^2}$, išteikšti punkto S koordinatomis. Tuo keliu gauta nauja funkcija $s_2(x, y) = a$, kuri ir reiškia 1-jo laipsnio išvestinę sinusalę. Įstačius gi ratilo, kaipo kotangensalės, lyginin $f_3(x_3, y_3) = a$ punkto Q koordinatų $x_3 = k, y_3 = r$ vieton joms iš (4) lygius dydžius $\frac{x^2}{y}$, x, išreikštus punkto T koordinatomis x, y gaunama nauja funkcija $t_2(x, y)$, kuri ir reikš 1-jo laipsnio išvestinę tangensalę.

Iš I-jo laipsnio išvestinių, pakeitus jų lyginiuose koordinatas x, y koordinatomis x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 ir jų vieton įstatant aukščiau nurodytus dydžius, išreikštus punkto S, T bei Q koordinatomis, gausime 2-jo laipsnio išvestines, ir t. t. iki m-jo laipsnio išvestinių.

Šis metodas m-jo laipsnio išvestinėms gautl galima pritaikinti bet kurioms algebriškoms kreivėms tipo

$$f(x, y, a, b, \ldots, p) = \varphi(a, b, \ldots, p)$$

Pavyzdžiui iš

a) elipsės $\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}=ab$

b) parabolės $\frac{y^2}{x}=2p$

c) tiesiosios $bx+ay=ab$

kaipo sinusalių, m-jo laipsnio išvestinės tangensalės ir kontangensalės bus šios:

$$(105)\quad \left\{\begin{array}{l} x^m\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}=ab(\sqrt{x^2+y^2})^m \\ y^m\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}=ab(\sqrt{x^2+y^2})^m \end{array}\right\}\ (a)$$

$$(106)\quad \left\{\begin{array}{r} x^{m-1}y^2=2p(\sqrt{x^2+y^2})^m \\ y^{m+2}=2px(\sqrt{x^2+y^2})^m \end{array}\right\}\ (b)$$

$$(107)\quad \left\{\begin{array}{r} x^m(bx+ay)=ab(\sqrt{x^2+y^2})^m \\ y^m(bx+ay)=ab(\sqrt{x^2+y^2})^m \end{array}\right\}\ (c)$$

Iš tų pačių kreivių kaipo tangensalių, m-jo laipsnio išvestinės sinusalės ir kotangensalės bus šios:

$$(105)'\quad \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{b^2x^2+a^2y^2}\,(\sqrt{x^2+y^2})^m=abx^m \\ \sqrt{b^2x^2+a^2y^2}\times y^m & =abx^m \end{array}\right\}\ (a')$$

$$(106)'\quad \left\{\begin{array}{ll} y^2(\sqrt{x^2+y^2})^m=2px^{m+1} \\ y^{m+2}=2px^{m+1} \end{array}\right\}\ (b)'$$

$$(107)'\quad \left\{\begin{array}{ll} (bx+ay)\,(\sqrt{x^2+y^2})^m=abx^m \\ (bx+ay)y^m & =abx^m \end{array}\right\}\ (c)'$$

Galop iš tų kreivių, kaipo kotangensalių, m-jo laipsnio sinusalės ir tangensalės bus šios:

$$(105)''\quad \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{b^2x^2+a^2y^2}\,(\sqrt{x^2+y^2})^m=aby^m \\ \sqrt{b^2x^2+a^2y^2}\times x^m & =aby^m \end{array}\right\}\ (a)''$$

$$(106)''\quad \left\{\begin{array}{ll} (\sqrt{x^2+y^2})^m=2pxy^{m-2} \\ x^{m-1}=2py^{m-2} \end{array}\right\}\ (b)''$$

$$(107)''\quad \left\{\begin{array}{ll} (bx+ay)\,(\sqrt{x^2+y^2})^m=aby^m \\ (bx+ay)\,x^m & =aby^m \end{array}\right\}\ (c)''$$

Duodant dydžiui m reikšmės 1, 2, 3, ... iš formulų (105) (106), (107); (105)′, (106)′, (107)′; (105)″, (106)″, (107)″ gausime 1-jo, 2-jo, 3-jo ir tolesnių laipsnių išvestines. Jų kai kurios pasitaiko ne vien tose sistemose, iš kurių yra išvestos, bet ir kitose. Pav. pirmoji išvestinė iš (107)

$$x(bx+ay)=ab\sqrt{x^2+y^2} \tag{108}$$

prie $a=b$ bus sistemos $S_{q=\frac{\pi}{2}}^{s+c=a}$ tangensalė; pirmoji išvestinė iš (107)′:

$$(bx+ay)\sqrt{x^2+y^2}=abx \tag{109}$$

prie $a=b$ bus sistemos $S_{q=\frac{\pi}{2}}^{r+z=a}$ sinusalė ir t. t.

Peržiūrėję aukščiau gautąsias įvairių kreivių m-jo laipsnio išvestines, labai lengvai susekame jų sudarymo dėsnius. Pasirodo, jos visos susidaro, dauginant jų pamatinės algebriškos kreivės lygini o:

$$f(x,y,a,b,\ldots,p)=\varphi(a,b,\ldots,p) \tag{110}$$

kairiąją pusę tam tikru koeficientu k. Tai reiškia kad 1-ji (110) kreivės išvestinė bus $kf(x,y,a,b,\ldots,p)=\varphi(a,b,\ldots,p)$, 2-ji $k^2f(x,y,a,b,\ldots,p)=\varphi(a,b,\ldots,p)$ ir galop m-ji

$$k^mf(x,y,a,b,\ldots,p)=\varphi(a,b,\ldots,p). \tag{111}$$

Tiktai šis koeficientas k įvairiose išvestinėse bus įvairus, būtent:

1) paėmę (110) kreivę sinusale, prie $k=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gausim aukštesnių laipsnių tangensalių, o prie $k=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, aukštesnių laipsnių kotangensalių;

2) paėmę (110) kreivę tangensale, prie $k=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, gausim aukštesnių laipsnių sinusalių, o prie $k=\frac{y}{x}$ aukštesnių laipsnių kotangensalių; galop

3) paėmę (110) kreivę kotangensale, prie $k=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$, gausim aukštesnių laipsnių sinusalių, o prie $k=\frac{x}{y}$ aukštesnių laipsnių tangensalių.

Visi šitie koeficientai yra gauti iš aukščiau nurodytųjų m-jo laipsnio išvestinių lyginių. Bet kadangi tos išvestinės gauta vien iš algebriškų kreivių, tatai ir tie koeficientai tetinka irgi vien algebriškųjų kreivių išvestinėms gauti.

Panašiu keliu iš m-jo laipsnio išvestinių (111) lyginio lengva gauti n laipsniais žemesniųjų išvestinių. Tam užtenka lyg. (111) kairiąją pusę padauginti koeficientu $\frac{1}{k^n} = k^{-n}$. Tai padarę gausime:

(112) $k^{m-n} f(x, y, a, b, .., p) = \varphi(a, b, .., p)$.

Prie $m = n$ gaunama pamatinės kreivės (110) lyginys.

Aukščiau išdėtas išvestinių gavimo mokslas galima išreikšti dar trumpiau, būtent tabeleriškai žemiau dedamose dviejose lentelėse:

(113)

Išvestinėms apskaitymu gauti	Kreivės $f(x,y,a,b,..,p) = f(c,s,a,b,..,p) = \varphi(a,b,..,p)$, kaipo sinusalės, lyginin vieton c ir s įstatyti joms lygūs dydžiai:	Kreivės $f(x,y,a,b,..,p) = f(r,t,a,b,..,p) = \varphi(a,b,..,p)$, kaipo tangensalės, lyginin vieton r ir t įstatyti joms lygūs dydžiai:	Kreivės $f(x,y,a,b,..,p) = f(k,r,a,b,..,p) = \varphi(a,b,..,p)$, kaipo kotangensalės, lyginin vieton k ir r įstatyti joms lygūs dydžiai:
Sinusalėms gauti		$\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}$	$\frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{x^2+y^2}$
Tangensalėms gauti	$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$		$\frac{x^2}{y}$, x
Kotangensalėms gauti	$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$	y, $\frac{y^2}{x}$	

(114)

Išvestinėms tiesiog. gauti	Kreivės $f(x,y,a,b,..,p)=\varphi(a,b,..,p,$ kaipo sinsalės, lyginio kairioji pusė reikia padauginti koeficientu k, lygiu:	Kreivės $f(x,y,a,b,..,p)=\varphi(a,b,..,p),$ kaipo tangensalės, lyginio kairioji pusė reikia padauginti koeficientu k, lygiu:	Kreivės $f(x,y,a,b,..,p)=\varphi(a,b,..,p),$ kaipo kotangensalės, lyginio kairioji pusė reikia padauginti koeficientu k, lygiu:
Sinusalėms		$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$
Tangensalėms	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$		$\frac{x}{y}$
Kotangensalėms	$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{y}{x}$	

Pav. jei lygiašonė hiperbolė $xy = a$ yra sinusalė, tai 1-jo laipsnio išvestinė tangensalę gausim padauginę $xy \,.\, k = xy \,.\, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = a^2$, arba

(115) $$x^2y = a^2\sqrt{x^2+y^2};$$

tos pat hiberbolės išvestinė kotangensalė bus $xy \,.\, k = xy \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} a^2$, arba

(116) $$xy^2 = a^2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Jei ta pati hiperbolė būtų būtų tangensalė, tai 1-jo laipsnio išvestinė sinusalė būtų: $xy \,.\, k = xy \,.\, \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = a^2$, arba

(117) $$y\sqrt{x^2+y^2} = a^2,$$

o 1-jo laipsnio išvestinė sinusalė būtų $xy \,.\, k = xy \,.\, \frac{y}{x} = a^2$, arba

(118) $$y^2 = a^2.$$

Galop, jei ta pati hiperbolė būtų kotangensalė, tai 1-jo laipsnio išvestinė sinusalė būtų $xy.k = xy.\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = a^2$, arba

(119) $$x\sqrt{x^2+y^2} = a^2 ,$$

o 1-jo laipsnio išvestinė tangensalė būtų: $xy.k = xy.\frac{x}{y} = a^2$, arba

(120) $$x^2 = a^2 .$$

Liginiai (118) ir (120) parodo, kad tuose atvejuose iš lygiašonės hiperbolės trigonometrišku brėžimu gaunama įdomios tiesiosios. Tą pačią ypatybę turi ir parabolė, nes jos kaipo kotangensalės, 1-jo laipsnio tangensalė yra taipgi tiesioji (106)″ Vadinas, išvestinės nurodo neretai ir pačios pamatinės kreivės ypatybes.

Išvestinių gavimas iš bet kokių algebriškų kreivių, apskritai tariant, yra galimas. Bet kai kuriuose atvejuose jis gali tapti paradoksališkas. Pav. jei imsim tiesiąją, einančiąją per koordinatų pradžią $y = ax$, tai, padarę trigonometrišką brėžimą, rastumėm, kad šiame atvejy geometriškos punktų S, T ir Q vietos esti toje pat tiesioje. Vadinas, čia išvestinės, kad ir gaunama, bet jos visos sutampa su duotąja tiesiąja $y = ax$, vis tiek, kaip ją imsime: sinusale, tangensale, ar kotangensalė. Šis paradoksas lengva išaiškinti. Nes jei $y = ax$ yra sinusalė, tai jai atsakanti sistema bus $S\begin{matrix}\frac{s}{c} = a \\ \varphi = \frac{\pi}{2}\end{matrix}$, kuri, kaip jau 1-oj šio tyrimo daly esame parodę, yra vienakampė. Tą pat rezultatą gausime ir tarę, tiesiąją $y = ax$ esant tangensalę ar kotengensalę; jai čia atitiks kitos sistemos $\left(S\begin{matrix}\frac{t}{r} = a \\ \varphi = \frac{\pi}{2}\end{matrix}, \; S\begin{matrix}\frac{r}{k} = a \\ \varphi = \frac{\pi}{2}\end{matrix}\right)$, kurios bus irgi vienakampės ir identiškos sistemai $S\begin{matrix}\frac{s}{c} = a \\ \varphi = \frac{\pi}{2}\end{matrix}$. O visos sistemos vienakampės, kaip esam matę, turi tą bendrą ypatybę, kad jose sinusalės, tangensalės ir kotangensalės sutampa, taigi vienos nuo kitų tesiskiria vien vardu.

Į tą pat rezultatą veda ir tiesioji

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1 \quad (121)$$

nes pridavę lyginiui (121) išvaizdą

$$\frac{y}{a-x}=\frac{b}{a} \quad (121)'$$

prie sąlygos $a=0$ ir $b=0$ iš (121)′ gausime:

$$-\frac{y}{x}=\frac{0}{0} \quad (121)''.$$

Vadinas, kiekviena per koordinatų pradžią einančioji tiesioji tam tikrų, a t s k i r ų išvestinių neduoda.

X.

Ikšiol mes gvildenome du pamatiniu klausimu: 1) kurios kreivės charakterizuoja turimąją trigonometriškąją sistemą ir 2) kurios sistemos atsako turimajai kreivei. Bet trigon. sistemos turi ne vien po tris charakterizuojančias jas kreives (sinusalę, tangensalę ir kotangensalę), bet ir savąsias trigonometriškas funkcijas. Tatai bus ne pro šalį patyrinėjus tų naujų trigonometriškų funkcijų esmę ir jų savytarpius santykius. Kadangi tų sistemų yra be galo daug, tai mes teimsime iš jų tik du tipu $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\psi+\sigma=a}$ ir $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\psi\sigma=a^2}$ ir iš jų tik po vieną sistemą, būtent $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r+s=a}$ ir $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=a^2}$. Jų kiekviena turės po septynias trigon. funkcijas s, c, t, k, z, q, r. Geometrijos atžvilgiu, jos reikš tam tikras linijas. Norint susekti jų matematiškąjį apibrėžimą, reikia sužinoti, kuriems minėtųjų linijų santykiams jos atsako. Tai padaryti gan lengva, remiantis visų stačiakampių sistemų pamatinėmis lygybėmis:

$$(122)\quad \begin{cases} \frac{s}{r}=\sin;\ \frac{t}{r}=\frac{s}{c}=\operatorname{tg};\ \frac{z}{r}=\frac{r}{c}=\sec; \\ \frac{c}{r}=\cos;\ \frac{k}{r}=\frac{c}{s}=\operatorname{ctg};\ \frac{q}{r}=\frac{r}{s}=\operatorname{cosec}, \end{cases}$$

ir paimtųjų sistemų nekintamumo sąlygomis $r+s=a$, $rs=a^2$.

Tolesniems apskaitymams suprastinti, tarkime $a=1$.

Tuomet sistemos $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r+s=1}$ kiekvieną trigon. funkciją padalinę nekintamu dydžiu $r+s=1$, gausime:

$$(123)\quad \begin{cases} \frac{r}{r+s}=r,\ \frac{s}{r+s}=s,\ \frac{c}{r+s}=c,\ \frac{t}{r+s}=t, \\ \frac{k}{r+s}=k,\ \frac{z}{r+s}=z,\ \frac{q}{r+s}=q, \end{cases}$$

iš kur paprastu atvertimu rasim:

$$(124)\quad \begin{cases} \frac{1}{r}=1+\frac{s}{r}=1+\sin, & \text{iš kur} & r=\frac{1}{1+\sin}, \\ \frac{1}{s}=1+\frac{r}{s}=1+\operatorname{cosec} & \text{„} & s=\frac{1}{1+\operatorname{cosec}}=\frac{\sin}{1+\sin}, \\ \frac{1}{c}=\frac{r}{c}+\frac{s}{c}=\sec+\operatorname{tg} & \text{„} & c=\frac{1}{\sec+\operatorname{tg}}=\frac{\cos}{1+\sin}, \\ \frac{1}{t}=\frac{r}{t}+\frac{s}{t}=\operatorname{cgt}+\cos & \text{„} & t=\frac{1}{\operatorname{ctg}+\cos}=\frac{\operatorname{tg}}{1+\sin}, \\ \frac{1}{k}=\frac{r}{k}+\frac{s}{k}=\operatorname{tg}+\sin.\operatorname{tg} & \text{„} & k=\frac{1}{\operatorname{tg}(1+\sin)}=\frac{\operatorname{ctg}}{1+\sin}, \\ \frac{1}{z}=\frac{r}{z}+\frac{s}{z}=\cos+\sin\cdot\cos & \text{„} & z=\frac{1}{\cos(1+\sin)}=\frac{\sec}{1+\sin}, \\ \frac{1}{q}=\frac{r}{q}+\frac{s}{q}=\sin+\sin^2, & \text{„} & q=\frac{1}{\sin(1+\sin)}=\frac{\operatorname{cosec}}{1+\sin}. \end{cases}$$

Sistemos gi $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=1}$ visas funkcijas padalinę padaugu $rs=1$ rasime:

$$(125)\quad \begin{cases} r=\dfrac{r}{rs}=\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{r\sin}=\operatorname{cosec}\frac{1}{2}; \\ s=\dfrac{s}{rs}=\dfrac{1}{r}=\sin\frac{1}{2}; \\ c=\dfrac{c}{rs}=\dfrac{c}{r}\cdot\dfrac{1}{s}=\cos\cdot\operatorname{cosec}\frac{1}{2}; \\ t=\dfrac{t}{rs}=\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{r\cos}=\sec\cdot\dfrac{1}{r}=\sec\cdot\sin\frac{1}{2}; \\ k=\dfrac{k}{rs}=\dfrac{c}{s^2}=\dfrac{c}{s}\cdot\dfrac{1}{s}=\operatorname{ctg}\cdot\dfrac{1}{s}=\operatorname{ctg}\cdot\operatorname{cosec}\frac{1}{2}; \\ z=\dfrac{z}{rs}=\dfrac{r}{cs}=\dfrac{r}{c}\cdot\dfrac{1}{s}=\sec\cdot\operatorname{cosec}\frac{1}{2}; \\ q=\dfrac{q}{rs}=\dfrac{r}{s^2}=\dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{1}{s}=\operatorname{cosec}\cdot\operatorname{cosec}\frac{1}{2}=\operatorname{cosec}\frac{3}{2}; \end{cases}$$

Formulos (124) ir (125) parodo, kad naujos trigon. funkcijos sistemose $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r+s=a}$ ir $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=a^2}$ prie $a=1$ yra susidariusios iš tam tikrų paprastų trigon. funkcijų kombinacijų.

Panašiu būdu galima surasti matematiškoji naujų trigon. funkcijų esmė netik visose tipų $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\psi+\sigma=a}$ ir $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\psi\sigma=a^2}$,

bet ir visų kitų stačiakampiose sistemose. Visos tos naujos funkcijos bus taip pat paprastų trigon. funkcijų kombinacijos, tik dažnai dar painesnės, negu aukščiau (124) ir (125) formulose nurodytosios.

Tačiau šis faktas, kad tos naujos funkcijos yra sukrautinės, neelementarės, nė kiek neliečia jų organiškos neskaidomybės savose sistemose. Visos jos kampų dydžiams išreikšti taip pat gerai tinka, kaip ir paprastos trigonometrijos funkcijos. Galima jomis išreikšti ir kampų sumų, liekanų bei padaugų funkcijas. Tam tikros formulos lengvai gaunama iš bendrų visoms stačiakampėms sistemoms santykių;

$$(126)\quad \left\{ \frac{\sin}{s}=\frac{\cos}{c}=\frac{\operatorname{tg}}{t}=\frac{\operatorname{ctg}}{k}=\frac{\sec}{z}=\frac{\operatorname{cosec}}{q}=\frac{1}{r}, \right.$$

kuriais naudodamies betarpiškai gauname:

$$(126)' \quad \frac{\sin(\alpha+\omega)}{s_{(\alpha+\omega)}} = \frac{\cos(\alpha+\omega)}{c_{(\alpha+\omega)}} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\omega)}{t_{(\alpha+\omega)}} = \ldots = \frac{1}{r_{(\alpha+\omega)}}$$

Iš čia pigiai prieinama ir šios kampų sumos bei liekanos funkcijoms reikšti sistemoj $\mathbf{S}_{q=\frac{\pi}{2}}^{rs=1}$

$$(127) \quad \begin{cases} r_{(\alpha\pm\omega)} = \dfrac{\sqrt{r_\alpha r_\omega}}{\sqrt{s_\alpha c_\omega \pm c_\alpha s_\omega}}, \\ s_{(\alpha+\omega)} = \dfrac{\sqrt{s_\alpha c_\omega \pm c_\alpha s_\omega}}{\sqrt{r_\alpha r_\omega}}, \\ c_{(\alpha\pm\omega)} = \dfrac{c_\alpha c_\omega \pm s_\alpha s_\omega}{\sqrt{r_\alpha r_\omega}\sqrt{s_\alpha c_\omega \mp c_\alpha s_\omega}}, \\ t_{(\alpha\pm\omega)} = \dfrac{\sqrt{r_\alpha r_\omega}\,(t_\alpha r_\omega \pm t_\omega r_\alpha)}{(r_\alpha r_\omega \pm t_\alpha t_\omega)\sqrt{s_\alpha c_\omega \pm c_\alpha s_\omega}} = \\ \qquad = \dfrac{\sqrt{r_\alpha r_\omega}\sqrt{s_\alpha c_\omega \pm c_\alpha s_\omega}}{c_\alpha c_\omega \mp s_\alpha s_\omega}. \end{cases}$$

Analogiškos formulos sistemoj $\mathbf{S}_{q=\frac{\pi}{2}}^{r\pm s=1}$ turės išvaizdą:

$$(128) \quad \begin{cases} r_{(\alpha\pm\omega)} = \dfrac{r_\alpha r_\omega}{r_\alpha r_\omega \pm s_\alpha c_\omega \pm s_\omega c_\alpha}, \\ s_{(\alpha\pm\omega)} = \dfrac{s_\alpha c_\omega + c_\alpha s_\omega}{r_\alpha r_\omega \pm s_\alpha c_\omega \pm c_\alpha s_\omega}, \\ c_{(\alpha\pm\omega)} = \dfrac{c_\alpha c_\omega \mp s_\alpha s_\omega}{r_\alpha r_\omega \pm s_\alpha c_\omega \pm c_\alpha s_\omega}, \\ t_{(\alpha\pm\omega)} = \dfrac{r_\alpha r_\omega (t_\alpha r_\omega \pm r_\alpha t_\omega)}{(r_\alpha r_\omega \pm t_\alpha t_\omega)(r_\alpha r_\omega \pm s_\alpha c_\omega \pm c_\alpha s_\omega)}. \end{cases}$$

Kadangi $s = 1 - r$ ir $r = 1 - s$, tai (128) formulose viena katra iš tų dviejų funkcijų s arba r galima pašalinti, įstatant josna vieton s arba r jiems lygius nurodytus dydžius $1 - r$ arba $1 - s$. Iš formulų (127) ir (128) galima gauti formulos kampų padaugams bei daliniams.

Apskritai kalbant, kiekvienai paprastos trigonometrijos formulai visada galima gauti atsakomos formulos, išreikštos naujų sistemų funkcijomis, išskyrus tik vienakampes sistemas, kurių trigon. funkcijos tėra realės viename tik kampe.

Dėliai to galima pasakyti, kad visos naujos trigonom. sistemos, išskyrus vienakampes, yra lygiateisės su mūsų paprastaja trigonometrijos sistema, nes nėra nė vieno uždavinio, išsprendžiamo paprastomis trigonometrijos funkcijomis, kurio nebūtų galima išspręsti naujomis trigon. funkcijomis.

Savo esme tos naujos trigon. funkcijos yra taip pat transcendentiškos, kaip ir paprastos, nūn vartojamosios ratilinės; jos taip pat galima diferencijuoti, vartoti naujuose integraluose, rutuloti nesibaigiamomis eilėmis ir t. t. Pavyzdžio dėliai imkim sistemos $S^{r+s=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ funkciją r. Jos diferencialas gaunama tiesiog iš (125) formulos, būtent:

$$(129) \qquad dr_x = d\left(\frac{1}{1+\sin x}\right) = -\left(\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}\right) dx .$$

Įstatę pastarajin reiškinin vieton $\sin x$ ir $\cos x$ jiems atatinkamus lygius dydžius iš (126), gausime galutinai:

$$(129)' \qquad dr_x = -\frac{r_x c_x dx}{(r_x + s_x)^2} = -r_x c_x dx .$$

Panašiu būdu iš tų pačių formulų (124) ir (126) gausime ir kitų sistemos $S^{r+s=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ funkcijų diferencialus. Jie turės šią išvaizdą:

$$(130)\quad \begin{cases} ds_x = r_x c_x\,dx \\ dc_x = -r_x\,dx \\ dt_x = \dfrac{r_x}{c^2_x}(r^2_x - r_x s_x + s^2_x)\,dx = \dfrac{t_x}{s_x c_x}(r^2_x - s_x c^2_x)\,dx, \\ dk_x = -\dfrac{r_x}{s^2_x}(r^2_x + r_x s_x - s^2_x)\,dx = -\dfrac{k_x}{s_x c_x}(r^2_x + s_x c^2_x)\,dx, \\ dz_x = \dfrac{z_x}{c_x}(s_x - c^2_x)\,dx = \dfrac{r^2_x}{c^2_x}(r_x - 2c^2_x)\,dx, \\ dq_x = -\dfrac{q_x c_x}{s_x}(1 + s_x)\,dx = -\dfrac{q_x c_x}{s_x}(r_x + 2s_x)\,dx. \end{cases}$$

Sistemoje gi $S^{rs=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ tų pačių funkcijų diferencialai bus šie:

$$(131)\quad \begin{cases} dr_x = -\dfrac{c_x}{2s^2_x}dx = -\dfrac{r^2_x c_x}{2}dx = -\frac{1}{2}k_x\,dx\,, \\ ds_x = \dfrac{c_x}{2}dx\,, \\ dc_x = -\dfrac{r_x(r^2_x + s^2_x)}{2}dx\,, \\ dt_x = -\dfrac{r_x}{2c^2_x}(r^2_x + c^2_x)\,dx = -\dfrac{t_z}{2s_x c_x}(r^2_x + c^2_x)\,dx\,, \\ dk_x = -\dfrac{r_x}{2s^2_x}(r^2_x + c^2_x)\,dx = -\dfrac{k_x}{2s_x c_x}(r^2_x + c^2_x)\,dx\,, \\ dz_x = \dfrac{r_x(2s^2_x - c^2_x)}{2c^2_x}dx = \dfrac{z^2_x s_x(2r^2_x - 3c^2_x)}{2}dx\,, \\ dq_x = -\frac{3}{2}\dfrac{r_x c_x}{s^3_x}dx = -\frac{3}{2}q_x r_x c_x\,dx = -\frac{3}{2}r^4_x c_x\,dx\,. \end{cases}$$

Iš (130) ir (131) formulų matome, jog naujose sistemose bus ir naujų integralų, būtent:

Sistemoje $S^{r+s=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$

(132)
$$\begin{cases} -\int r_x c_x dx = r_x + C, \\ \int r_x c_x dx = s_x + C, \\ -\int r_x dx = c_x + C, \\ \int \frac{t_x}{s_x c_x}(r^2_x - s_x c^2_x)\, dx = t_x + C, \\ -\int \frac{k_x}{s_x c_x}(r^2_x + s_x c^2_x)\, dx = k_x + C, \\ \int \frac{z_x}{c_x}(s_x - c^2_x)\, dx = z_x + C, \\ -\int \frac{q_x c_x}{s_x}(r + 2s_x) = q_x + C, \end{cases}$$

Sistemoje gi $S^{rs=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ bus šių integralų:

(133)
$$\begin{cases} -\int \frac{k_x}{2} dx = r_x + C, \\ \int \frac{c_x}{2} dx = s_x + C, \\ -\int \frac{r_x(r^2_x + s^2_x)}{2} dx = c_x + C, \\ -\int \frac{t_x}{s_x c_x}(r^2_x + c^2_x)\, dx = t_x + C, \\ -\int \frac{k_x}{s_x c_x}(r^2_x + c^2_x)\, dx = k_x + C, \\ \int \frac{z_x^2 s_x}{2}(2r^2_x - 3c^2_x)\, dx = z_x + C, \\ -\int \frac{3}{2} q_x r_x c_x dx = q_x + C. \end{cases}$$

Paėmę lyginių eilę:

$$(134)\qquad \begin{cases} y = r_x, \\ y = s_x, \quad y = c_x, \\ y = t_x, \quad y = k_x, \\ y = z_x, \quad y = q_x. \end{cases}$$

Gausime kiekvienoj sistemoj po septynetą naujų transcendenčių kreivių, būtent radiusoidą, sinusoidą, kosinusoidą ir t. t. Jos kiekvienoj sistemoj turės kitokią išvaizdą. Pav. sistemoj $S^{r+s=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ tų transcendenčių kreivių forma bus galima pigiai susekti iš lyginių:

$$(135)\qquad \begin{cases} y = r_x = (1+\sin x)^{-1}, \\ y = s_x = \sin x\,(1+\sin x)^{-1}, \quad y = c_x = \cos x\,(1+\sin x)^{-1}, \\ y = t_x = \operatorname{tg} x\,(1+\sin x)^{-1}, \quad y = k_x = \operatorname{ctg} x\,(1+\sin x)^{-1}, \\ y = z_x = \sec x\,(1+\sin x)^{-1}, \quad y = q_x = \operatorname{cosec} x\,(1+\sin x)^{-1}. \end{cases}$$

o sistemoj $S^{rs=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ iš lyginių:

$$(136)\qquad \begin{cases} y = r_x = \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x, \\ y = s_x = \sin^{\frac{1}{2}} x \quad , \quad y = c_x = \cos x \,.\, \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x, \\ y = t_x = \sec x \,.\, \sin^{\frac{1}{2}} x \quad , \quad y = k_x = \operatorname{ctg} x \,.\, \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x, \\ y = z_x = \sec x \,.\, \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x, \quad y = q_x = \operatorname{cosec}^{\frac{3}{2}} x. \end{cases}$$

Kitokių transcendenčių kreivių kiekvienoje sistemoje galima gauti imant funkcijų r_x, s_x, c_x, t_x, k_x, z_x, q_x atverstines ir lyginant jas y-ui. Tuo būdu kiekvienoj sistemoj rasim po septynias naujas transcendentes funkcijas išreikštas lyginiais:

$$(137)\qquad \begin{cases} y = \operatorname{arc} r_x \\ y = \operatorname{arc} s_x \;, \quad y = \operatorname{arc} c_x, \\ y = \operatorname{arc} t_x \;, \quad y = \operatorname{arc} k_x, \\ y = \operatorname{arc} z_x \;, \quad y = \operatorname{arc} q_x. \end{cases}$$

Jų pirmoji arkusradiusoida, antroji — arkussinusoida, trečioji — arkuskosinusoida ir t.t.

Naujos transcendentės funkcijos tipų (134), (137), apskritai tarus, bus labai įvairios, taip pat kaip ir atsakomos joms sistemos.

Kadangi visos tos kreivės, kaipo pareinančios iš periodiškų funkcijų, bus taip pat periodiškos, tatai galima tikėtis, kad jų neviena tiks įvairiems gamtoj pasitaikantiems periodiškumo dėsniams išreikšti. Bet į detalį jų tyrinėjimą čia neįsileisime, nes tai per toli mus nuvestų nuo šio straipsnio temos.

XI.

Tyrinėjimas naujų trigonometriškų sistemų yr privedęs mus prie naujų trigonometriškų funkcijų, turinčių ne vieną naują ypatybę. Tarp tų ypatybių labiausiai pažymėtinos naujų trigonometriškų funkcijų kintamumo ribos.

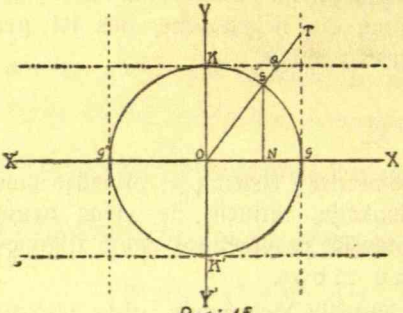
Paprastų trigonometrijos funkcijų kintamumo ribos visiems žinomos: visų siauriausios yra sino ir kosino; jų kraštutinės reikšmės yra $+1$ ir -1. Daug platesnės sekanso ir kosekanso: nuo ± 1 lig $\pm\infty$; o visų plačiausios tai tangenso ir kotangenso: nuo $+\infty$ lig $-\infty$. Platesnių kintamumo ribų, rodos, nė negalima sau nė įsivaizduot.

Naujos trigonometriškos sistemos parodė, kad tai netiesa, nes jose pasitaiko naujų trigonometriškų funkcijų su begaliniai platesnėmis kintamumo ribomis, būtent besikeičiančių tarp $+\infty^2$ ir $-\infty^2$, tarp $+\infty^3$ ir $-\infty^3$ ir net aplamai tarp $+\infty^n$ ir $-\infty^n$, kame n gali reikšti bet kokį neskaidytą skaičių.

Šie rezultatai taip paradoksališki, kad net ir profesionalai matematikai, tai išgirdę, gali paabejoti jų tikrumu. Taigi bus ne pro šalį šią tiesą čia matematiškai įrodžius.

Pradėkim nuo paprastai nūn vartojamosios trigonometriškos sistemos $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r=1}$. Tesie paprastų dekartinių koordinatų ašys XX_1, YY_1. Iš koordinatų pradžios O stipinu $OG=r=1$ nubrėžkime ratilą; tesie bet koks kampas $GOS=\alpha$. Nubrėžkime jame visas šešias trigonometriškas linijas — sino $SN=s$, kosino $ON=c$, tangenso $TG=t$, kotangenso $QK=k$, sekanso $OT=z$ ir kosekanso $OQ=q$. Tuomet rasime, jog geometriškoji punkto S vieta arba mūsų paprastos trigon. sistemos sinusalė bus ratilas stipinu $r=1$, geometriškoji punkto T vieta arba mūsų paprastosios sistemos tangensalė bus dvi tiesioji $x=\pm 1$, liečianti ratilą punktuose G ir G' ir galop geometriškoji punkto Q vieta arba mūsų paprastosios sistemos kotangensalė bus irgi dvi tiesioji

$y = \pm 1$, liečianti ratilą punktuose K ir K' (žiūr. 15 brėž.). Visos tos trys linijos, charakterizuojančios mūsų paprastąją trigonometrijos sistemų (t. y. josiosios sinusalę, tangensalę ir kotangensalę) galima analitiškai išreikšti šiais lyginiais:



Brėž. 15.

$$(138)\quad \begin{cases} y^2 = 1 - x^2, \\ x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Kadangi paprastoj trigon. sistemoj šešios trigon. funkcijos yra nustatomos šiomis pamatinėmis lygybėmis:

$$(122)'\quad \begin{cases} \sin = \frac{s}{r};\ \operatorname{tg} = \frac{t}{r} = \frac{s}{c};\quad \sec = \frac{z}{r} = \frac{r}{c}; \\ \cos = \frac{c}{r};\ \operatorname{ctg} = \frac{k}{r} = \frac{c}{s};\ \operatorname{cosec} = \frac{q}{r} = \frac{r}{s}, \end{cases}$$

ir kadangi čia prie $r = 1$ tegali būti lygus zerui vien s arba c, todel tolimiausių kintamumo ribų $+\infty$ arba $-\infty$ tegali pasiekti tik keturios funkcijos — tangensas, kotangensas, sekansas ir kokansas.

Imkime nūn kokią naują trigon. sistemą, pav. $S^{s=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$.

Joje visi sinai turi nekintamąjį dydį lygų a. Iš tos priežasties sinusale bus čia dvi tiesiaji paraleli ašiai XX_1, nutiesti atstumu nuo šios pastarosios lygiu $\pm a$. Tosios sistemos tangensalė bus kryžinė kreivė, o kotangensalė — 4-jo laipsnio hiperbolė. Tų trijų sistemą $S^{s=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ charakterizuojančių kreivių lyginiai bus šie:

$$(139)\quad \begin{cases} y = \pm a, \\ y = \pm \dfrac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \\ x = \pm \dfrac{y}{a}\sqrt{y^2 - a^2}. \end{cases}$$

Nupiešę tas tris linijas gausime 16 brėžinį žiūrėk šio straipsnio gale). Iš jo, o taipgi ir iš pamatinių lygybių (122)′, kurios nustato trigonometriškųjų linijų santykius visose sistemose tipo $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$, lengva įrodyti, jog sistemoje $S^{s=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ dviejų funkcijų, būtent kotangenso ir kosekanso kintamumo ribos yra begatinai platesnės negu tų pačių funkcijų mūsų paprastoj trigon. sistemoj $S^{r=1}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$.

Iš tikrųjų iš lygybių (122)′ gauname

$$k=\frac{rc}{s},\quad q=\frac{r^2}{s}; \tag{140}$$

bet prie nekintamo $s=a$ iš 16 brėž. matome, jog sistemoj $S^{s=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ trigon. funkcijos r ir c, mažtant kampui, be galo didėja todel, kampui artėjant į nulį, funkciji k ir q, t. y. kotangensas, ir kosekansas artės į ∞^2, nes iš (140) turime

$$\begin{cases} k_0=\dfrac{r_0 c_0}{s_0}=\dfrac{\infty\cdot\infty}{a}=\infty^2, \\ q_0=\dfrac{r_0^2}{s_0}=\dfrac{\infty^2}{a}=\infty^2. \end{cases} \tag{141}$$

Panašiu būdu rasime, jog $k_\pi=-\infty^2$, $q_{2\pi}=-\infty^2$.

Kitų tos pat sistemos $S^{s=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ funkcijų kintamumo ribos bus begalinai siauresnės, būtent funkcija c keisis nuo 0 lig $+\infty$, o t, z, r nuo a lig $+\infty$ bei $-\infty$.

Funkcijų su kintamumo ribomis nuo 0 bei a lig $+\infty^2$ bei $-\infty^2$ esama ir kitose naujose sistemose, pav. $S^{c=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$, $S^{t=a}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$ ir t.t.

Nūn imkime dar painesnę sistemą $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=a^2}$. Josios sinusalė bus 4-jo laipsnio konchoida, turinti asimptota ašį XX', tangensalė — 6-jo laipsnio kryžinė, turinti asimptota ašį XX' ir tiesiąsias $x=\pm a$, ir kotangensalė — 6-jo laipsnio hiperbolė su simetrijos ašim XX'. Tų trijų sistemą $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=a^2}$ charakterizuojančiųjų kreivių lyginiai bus:

$$(142)\qquad \begin{cases} x=\pm\frac{1}{y}\sqrt{a^4-y^4}\,, \\ y=\pm\frac{a^2x}{\sqrt{x^4-a^4}}\,, \\ x=\pm\frac{y}{a^2}\sqrt{y^4-a^4}\,. \end{cases}$$

Nubrėžę tas tris kreives, gausim 17 brėžinį (žiūr. šio straipsnio gale). Iš jo, o taipgi iš jo lygybių (122)′, kurios ir sistemoj $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=a^2}$ nustato pamatinius trigonometriškųjų linijų santykius, lengva įrodyti, jog kotangenso ir kosekanso sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=a^2}$ kintamumo ribos bus begaliniai platesnės negu tų pačių funkcijų sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=a}$.

Ir iš tikrųjų iš lygybių (122)′ turime, jog

$$(143)\qquad k=\frac{rc}{s}\,,\quad q=\frac{r^2}{s}\,,$$

bet iš nekintatumo sąlygos $rs=a^2$, randam, jog $s=\frac{a^2}{r}$. Įstatę šį reiškinį lygybėsna (143), gausime:

$$(144)\qquad k=\frac{r^2c}{a^2}\,,\quad q=\frac{r^3}{a^2}\,.$$

Bet kadangi, mažėjant kampui, stipinas r ir kosinas c sis-

temoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=a^2}$, begaliniai didėja, tatai, kampui artėjant į nulį, kotangensas ir kosekansas artės čia į ∞^3, nes iš (144) turime:

$$(145)\quad \begin{cases} k_0 = \dfrac{r_0^2 c_0}{a^2} = \dfrac{\infty^2 . \infty}{a^2} = \infty^3 , \\ q_0 = \dfrac{r_0^3}{a^2} = \dfrac{\infty^3}{a^2} = \infty^3 . \end{cases}$$

Panašiu būdu rasime, jog, kampui artėjant į π, $k_\pi = -\infty^3$, o kampui artėjant į 2π, $q_{2\pi} = -\infty^3$.

Kitų tos pat sistemos $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=a}$ funkcijų, būtent c, t, z, r, maksimalis dydis tesieks tik $\pm\infty$.

Funkcijų su kintamumo ribomis nuo O bei a lig $\pm\infty^3$ esama ir kitose naujose trigon. sistemose, pav. $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rc=a^2}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{ct=a^2}$ ir t. t.

Jei imtumėm sistemas $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r^2 s=a^3}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r^3 s=a^4}$ ir p., tai jose rastumėm funkcijų su kintamumo ribomis nuo O bei a lig $\pm\infty^4$, $\pm\infty^5$ ir t. t.

Charakterizuojančių tas sistemas linijų sinusalių, tangensalių ir kotangensalių lyginiai turės šią išvaizdą:

Sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r^2 s=a^3}$

$$(146)\quad \begin{cases} (x^2+y^2)y = a^3 \quad \text{arba} \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{a^3-y^3}{y}} , \\ \dfrac{x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}} = a^3 \quad \text{„} \quad y = \pm\dfrac{a^3 x}{\sqrt{x^6-a^6}} , \\ \dfrac{y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} = a^3 \quad \text{„} \quad x = \pm\dfrac{y}{a^3}\sqrt{y^6-a^6} , \end{cases}$$

temoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=a^2}$, begaliniai didėja, tatai, kampui artėjant į nulį, kotangensas ir kosekansas artės čia į ∞^3, nes iš (144) turime:

$$(145)\quad \begin{cases} k_0 = \dfrac{r_0^2 c_0}{a^2} = \dfrac{\infty^2 . \infty}{a^2} = \infty^3 , \\ q_0 = \dfrac{r_0^3}{a^2} = \dfrac{\infty^3}{a^2} = \infty^3 . \end{cases}$$

Panašiu būdu rasime, jog, kampui artėjant į π, $k_\pi = -\infty^3$, o kampui artėjant į 2π, $q_{2\pi} = -\infty^3$.

Kitų tos pat sistemos $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=a}$ funkcijų, būtent c, t, z, r, maksimalis dydis tesieks tik $\pm\infty$.

Funkcijų su kintamumo ribomis nuo O bei a lig $\pm\infty^3$ esama ir kitose naujose trigon. sistemose, pav. $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rc=a^2}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{ct=a^2}$ ir t. t.

Jei imtumėm sistemas $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r^2s=a^3}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r^3s=a^4}$ ir p., tai jose rastumėm funkcijų su kintamumo ribomis nuo O bei a lig $\pm\infty^4$, $\pm\infty^5$ ir t. t.

Charakterizuojančių tas sistemas linijų sinusalių, tangensalių ir kotangensalių lyginiai turės šią išvaizdą:

Sistemoje $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r^2s=a^3}$

$$(146)\quad \begin{cases} (x^2+y^2)y = a^3 \quad \text{arba} \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{a^3-y^3}{y}} , \\ \dfrac{x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}} = a^3 \quad „ \quad y = \pm\dfrac{a^3 x}{\sqrt{x^6-a^6}} , \\ \dfrac{y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} = a^3 \quad „ \quad x = \pm\dfrac{y}{a^3}\sqrt{y^6-a^6} , \end{cases}$$

$$(149)\quad \begin{cases} (xy+x^2+y^2)(x+y+\sqrt{x^2+y^2}) = axy \\ (xy+x^2+y^2)(x+y+\sqrt{x^2+y^2}) = ay\sqrt{x^2+y} \\ (xy+x^2+y^2)(x+y+\sqrt{x^2+y^2}) = ax\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Nupiešę tas kreives, rastumėm, kad jos yra vabalinių (Käferkurve) rūšies.

Sujungę bet kurį vienos iš tų kreivių punktą su koordinatų pradžia tiesiaja, gausim tam tikrą kampą, kuriame, nubrėžę trigonometriškas linijas, lengvai pastebėsime, kad, kampui einant iš vienos ketvirties kiton, jos taip pat keičia ženklus, kaip ir mūsų paprastoj trigonometrijos sistemoj. Tačiau sudėjus visas tas trigon. linijas krūvon, atsižvelgdami į jų ženklus, visada gausime, kad jų suma bus lygi tam pačiam dydžiui a. Kampuose mažesniuose neg $\frac{\pi}{2}$ visų tų funkcijų skaitmeninis dydis bus mažesnis neg a. Kampuose didesniuose neg $\frac{\pi}{2}$ t. y. ribose nuo $\frac{\pi}{2}$ lig 2π atskiros trigonometriškos linijos, būdamos vienos pozityvios, kitos negatyvios, galės turėti absoliutų dydį ir didesnį neg a, bet niekados nesiekiantį ∞. Ši ypatybė pasiliks net ir kampų 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ ir 2π funkcijose, nes penkerios iš jųjų, kad ir bus lygios nuliui, užtat likusios dvi — tangensas su sekansu, arba kotangensas su kosekansu bus lygios $\frac{a}{2}$, taigi sumoje sudarys tą patį dydį a. Tuo lengva įsitikinti, išreiškus (149) lyg. polerėmis koordinatomis. Pav. iš pirmojo tų lyginių, žinodami, jog polerė koordinata ρ bus čia identiška funkcijai r, gauname

$$(150)\quad r = \frac{a \sin\omega \cos\omega}{(1+\sin\omega\cos\omega)(1+\sin\omega+\cos\omega)}$$

Bet kadangi sintemoj $\mathbf{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{A_x=a}$, kaipo stačiakampėj, esama (122) lygybių, parodančių, jog $s = r\sin$, $c = r\cos$, $t = r\,\mathrm{tg}$, $z = r\sec$, todel daugindami (150) lygybę paeiliui reiškiniu $\sin\omega$, $\cos\omega$, $\mathrm{tg}\,\omega$, $\sec\omega$, rasime, jog visos tos funkcijos prie $\omega = 0$ bus lygios $= 0$ drauge su r_0. Norėdami sužinoti, kuo virs sistemoj $\mathbf{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{A_x=a}$ funkcija k, kuri, kaip parodo (122)′ santykiai, yra lygi $r\,\mathrm{ctg}$, pa-

dauginkim lygybę (150) daugikliu $\frac{\cos\omega}{\sin\omega}$. Tuomet prie $\omega = 0$ rasim:

$$(151)\quad k_0 = r_0\frac{\cos\omega}{\sin\omega} = \frac{a\cos^2\omega}{(1+\sin\omega\cos\omega)(1+\sin\omega+\cos\omega)} =$$

$$= \frac{a}{1(1+0+1)} = \frac{a}{2}.$$

Padauginę tą pačią (150) lygybę daugikliu $\operatorname{cosec}\omega = \frac{1}{\sin\omega}$, prie $0 = \omega$ rasim, kad ir funkcija q šiame atvejy bus irgi $= \frac{a}{2}$.

Panašiu būdu prie $\omega = \frac{\pi}{2}$ rastumėm, jog $t_{\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2}$ ir $z_{\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2}$, o $k_{\frac{\pi}{2}}$ ir $q_{\frac{\pi}{2}}$ šiame atvejy virsta nuliu.

Sistemai $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{A_x=a}$ yr analogiška sistema $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{A_{\pm x}=a}$, kame $A_{\pm x} = a = r_x - s_x + c_x - t_x + k_x - z_x + q_x$. Ją charakterizuoja trys kreivės turės šiuos šiuos lyginius:

$$(152)\quad \begin{cases} (x^2-y^2+xy)\sqrt{x^2+y^2}+(x-y)(x^2+y^2-xy) = \\ \qquad = axy, \\ (x^2-y^2+xy)\sqrt{x^2+y^2}+(x-y)(x^2+y^2-xy) = \\ \qquad = ay\sqrt{x^2+y^2}, \\ (x^2-y^2+xy)\sqrt{x^2+y^2}+(x-y)(x^2+y^2-xy) = \\ \qquad = ax\sqrt{x^2+y^2}, \end{cases}$$

Sistemose $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{A_x=a}$ ir $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{A_{\pm x}=a}$ tam tikra sąlyga yra surištos visos tų sistemų trig. funkcijos. Galimos sistemos ir su siauresnėmis nekintamumo sąlygomis, pav. kad dviejų, trijų, kekurių ir t. t. funkcijų suma būtų lygi išaukšto nustatytam dydžiui. Tuomet funkcijos ton sąlygon neįtrauktos galės ir nesibaigiamai didėti. Tokių sistemų pavyzdžius mes esam nurodę šio tyrimo pirmoje dalyje (V §).

XII.

Savo brošihroj „Naujos trigonometriškos sistemos“, kalbėdami apie elementares sistemas, mes esam davę charakterizuojančių jas kreivių tik po porą, būtent nurodėm vien sinusalių ir tangensalių lyginius. Kotangensalė, kaipo vėliau mūsų išrastoji, ten buvo apleista. Papildydami tą nepilnumą, paduodame čia kiekvienos elementarės trigonometriškos sistemos visą trejetą charakterizuojančių ją kreivių. Šių lyginiai turės šią išvaizdą:

1. $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r=a}$

(153)
$$\begin{cases} y^2 = a^2 - x^2, \\ x = \pm a, \\ y = \pm a. \end{cases}$$

Bendresnėj sistemoj $S_{\varphi=\alpha}^{r=a}$ tie lyginiai (153) turės šią išvaizdą:

(154)
$$\begin{cases} y^2 = a^2 - x^2, \\ x = a + y \operatorname{ctg} \alpha, \\ y = a \sin \alpha. \end{cases}$$

2. $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=\alpha}$

(155)
$$\begin{cases} y = \pm a, \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = a, \\ \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = a. \end{cases}$$

Bendresnėj sistemoj $S_{\varphi=\alpha}^{s=a}$ lyginiai atrodys šiaip:

(156)
$$\begin{cases} y = a \sin \alpha, \\ y(x - y \operatorname{ctg} \alpha) = a \sin \alpha \sqrt{x^2+y^2}, \\ y^2 = a\sqrt{x^2+y^2} - \cos \alpha \sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

3. $\mathbf{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{t=a}$

(157)
$$\begin{cases} \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}=a\,, \\ y=\pm a\,, \\ y^2=ax\,. \end{cases}$$

Bendresnėj sistemoj $\mathbf{S}_{\varphi=\alpha}^{t=a}$ lyginiai (157) turės išvaizdą:

(158)
$$\begin{cases} a(x\sin\alpha-y\cos\alpha)=y\sqrt{x^2+y^2}\,, \\ y=a\sin\alpha\,, \\ ay\sin\alpha\cos\alpha=ax\sin^2\alpha-y^2\,. \end{cases}$$

4. $\mathbf{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{z=a}$

(159)
$$\begin{cases} y^2=x(a-x)\,, \\ y^2=a^2-x^2\,, \\ \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}=a\,. \end{cases}$$

Bendresnėj sistemoj $\mathbf{S}_{\varphi=\alpha}^{z=a}$ lyginiai (159) atrodys:

(160)
$$\begin{cases} y\operatorname{ctg}\alpha=x-\frac{x^2+y^2}{a}\,, \\ y^2=a^2-x^2\,, \\ y\cos\alpha=ax\sin\alpha-y\sqrt{x^2+y^2}\,, \end{cases}$$

5. $\mathbf{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{c=a}$

(161)
$$\begin{cases} x=\pm a\,, \\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=a\,. \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=a\,. \end{cases}$$

Bendresnės sistemos $\mathbf{S}_{\varphi=\alpha}^{c=a}$ lyginiai (161) turės išvaizdą:

$$(162)\quad \begin{cases} x = a + y\operatorname{ctg}\alpha\,, \\ y\operatorname{ctg}\alpha = x - \sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}\,, \\ y\cos\alpha = xy - a\sin\alpha\sqrt{x^2+y^2}\,. \end{cases}$$

6. $\mathbf{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{k=a}$

$$(163)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2} = a\,, \\ y = \dfrac{x^2}{a}\,, \\ x = \pm a\,. \end{cases}$$

Bendresnės sistemos $\mathbf{S}_{\varphi=\alpha}^{k=a}$ lyginiai (163) atrodys:

$$(164)\quad \begin{cases} y\operatorname{ctg}\alpha = x - \dfrac{ay\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \\ y\operatorname{ctg}\alpha = x - \sqrt{ay\operatorname{cosec}\alpha}\,, \\ y\cos\alpha = (x-a)\sin\alpha\,. \end{cases}$$

7. $\mathbf{S}_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{q=a}$

$$(165)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y} = a\,, \\ \dfrac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2} = a\,, \\ y^2 = a^2 - x^2\,. \end{cases}$$

Bendresnės sistemos $\mathbf{S}_{\varphi=\alpha}^{q=a}$ lyginiai (165) įgaus išvaizdą:

$$(166)\quad \begin{cases} y = \dfrac{x^2+y^2}{a\operatorname{cosec}\alpha}\,, \\ y\operatorname{ctg}\alpha = x - \dfrac{ay\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \\ y^2 = a^2 - x^2\,. \end{cases}$$

8. $\mathbf{S}_{s=b}^{r=a}$

(167)
$$\begin{cases} y^2 = a^2 - x^2 , \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{y^2+(x-a)^2}} , \\ y^2 = \dfrac{a^4}{b^2} - x^2 . \end{cases}$$

9. $\mathbf{S}_{t=b}^{r=a}$

(168)
$$\begin{cases} y^2 = a - x , \\ y^2 = b - (x-a)^2 , \\ y^2 = a - \left(x - \dfrac{a^2}{b}\right)^2 . \end{cases}$$

10. $\mathbf{S}_{z=b}^{r=a}$

(169)
$$\begin{cases} y^2 = a^2 - x^2 , \\ y^2 = b^2 - x^2 , \\ y^2 = a^2 - \left(x - \dfrac{a}{b}\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 . \end{cases}$$

11. $\mathbf{S}_{c=b}^{r=a}$

(170)
$$\begin{cases} y^2 = a^2 - x^2 , \\ y^2 = \dfrac{a^4}{b^2} - x^2 , \\ y^2 = \dfrac{a^2}{b^2}(x-a) - x . \end{cases}$$

12. $\mathbf{S}_{k=b}^{r=a}$

(171)
$$\begin{cases} y^2 = a^2 - x^2 , \\ y^2 = \dfrac{a^4}{b^2} - (x-a)^2 , \\ y^2 = a^2 - (x-b)^2 . \end{cases}$$

13. $\mathbf{S}_{q=b}^{r=a}$

$$(172)\qquad \begin{cases} y^2 = a^2 - x^2 , \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{y^2+(x-a)^2}} , \\ y^2 = b^2 - x^2 . \end{cases}$$

14. $\mathbf{S}_{t=b}^{s=a}$

$$(173)\qquad \begin{cases} y^2 = a^2 - (x - \dfrac{a}{b}\sqrt{x^2+y^2})^2 , \\ y^2 = b^2 - (x - \dfrac{a}{b}\sqrt{x^2+y^2})^2 , \\ y^2 = a\sqrt{x^2+y^2} - (x - \dfrac{a}{b}\sqrt{x^2+y^2})^2 . \end{cases}$$

15. $\mathbf{S}_{z=b}^{s=a}$

$$(174)\qquad \begin{cases} y^2 = a^2 - \left(x - \dfrac{x^2+y^2}{b}\right)^2 , \\ y^2 = b^2 - x^2 , \\ y^2 = a\sqrt{x^2+y^2} - \left(x - \dfrac{\sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}}{b}\right)^2 . \end{cases}$$

16. $\mathbf{S}_{c=b}^{s=a}$

$$(175)\qquad \begin{cases} y^2 = a^2 - (x-b)^2 , \\ y^2 = \dfrac{a^2}{b}\sqrt{x^2+y^2} - \left(x - \sqrt{b\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 , \\ y^2 = a\sqrt{x^2+y^2} - \left(x - \dfrac{b}{a}\sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 . \end{cases}$$

17. $\mathbf{S}_{k=b}^{s=a}$

$$(176)\qquad \begin{cases} y^2 = a^2 - \left(x - \dfrac{ab}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2, \\ y^2 = \dfrac{a}{b^3}\sqrt[3]{ab\,(x^2+y^2)^2} - \left(x - \sqrt[3]{b\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2, \\ y^2 = a\sqrt{x^2+y^2} - (x-b)^2. \end{cases}$$

18. $\mathbf{S}_{q=b}^{s=a}$

$$(177)\qquad \begin{cases} y^2 = ab - x^2. \\ y^2 = \dfrac{a}{b}(x^2+y^2) - (x - \sqrt{ab})^2. \\ y^2 = b^2 - x^2. \end{cases}$$

19. $\mathbf{S}_{z=b}^{t=a}$

$$(178)\qquad \begin{cases} y^2 = \dfrac{a^2}{b^2}(x^2+y^2) - \left(x - \dfrac{x^2+y^2}{b}\right)^2, \\ y^2 = a^2 - x^2, \\ y^2 = \dfrac{a^2}{b^2}(x^2+y^2) - \left[x - \dfrac{a}{b^2}(x^2-y^2)\right]^2. \end{cases}$$

20. $\mathbf{S}_{c=b}^{t=a}$

$$(179)\qquad \begin{cases} y^2 = \dfrac{a^2b^2}{x^2+y^2} - (x-b)^2, \\ y^2 = a^2 - (x - \sqrt{ab})^2, \\ y^2 = \sqrt[3]{a^2b^2(x^2+y^2)} - \left(x - \sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}(x^2+y^2)}\right)^2. \end{cases}$$

21. $\mathbf{S}_{k=b}^{t=a}$

$$(180)\qquad \begin{cases} y^2 = ab - x^2, \\ y^2 = a^2 - (x - \sqrt{ab})^2, \\ y^2 = ab - (x-b)^2. \end{cases}$$

22. $\mathbf{S}_{q=b}^{t=a}$

$$(181)\qquad \begin{cases} y^2 = \left(\dfrac{x^2+y^2}{b}\right)^2 - \left(x - \dfrac{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{ab}\right)^2 , \\ y^2 = a^2 - \left(x - \dfrac{ab}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 , \\ y^2 = b^2 - x^2 . \end{cases}$$

23. $\mathbf{S}_{c=b}^{z=a}$

$$(182)\qquad \begin{cases} y^2 = ab - x^2 , \\ y^2 = a^2 - x^2 , \\ y^2 = ab - \left(x - \sqrt{\dfrac{a}{b}(x^2+y^2)}\right)^2 . \end{cases}$$

24. $\mathbf{S}_{k=b}^{z=a}$

$$(183)\qquad \begin{cases} y^2 = \dfrac{(x^2+y^2)^3}{a^2b^2} - \left(x - \dfrac{x^2+y^2}{a}\right)^2 , \\ y^2 = a^2 - x^2 , \\ y^2 = \dfrac{a^2b^2}{x^2+y^2} - (x-b)^2 . \end{cases}$$

25. $\mathbf{S}_{q=b}^{z=a}$

$$(184)\qquad \begin{cases} y^2 = \left(\dfrac{x^2+y^2}{b}\right)^2 - \left(x - \dfrac{x^2+y^2}{a}\right)^2 , \\ y^2 = a^2 - x^2 , \\ y^2 = b^2 - x^2 . \end{cases}$$

26. $\mathbf{S}_{k=b}^{c=a}$

$$(185)\quad \begin{cases} y^2=\frac{a^2}{b^2}(x^2+y^2)-(x-a)^2\,, \\ y^2=\frac{a^2}{b^2}(x^2+y^2)-\left(x-\sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2, \\ y^2=\frac{a^2}{b^2}(x^2+y^2)-(x-b)^2\,. \end{cases}$$

27. $S_{q=b}^{c=a}$

$$(186)\quad \begin{cases} y^2=\left(\frac{x^2+y^2}{b}\right)^2-(x-a)^2\,, \\ y^2=\frac{a\sqrt{(x^2+y^2)^3}}{b^2}-\left(x-\sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2, \\ y^2=b^2-x^2\,. \end{cases}$$

28. $S_{q=b}^{k=a}$

$$(187)\quad \begin{cases} y^2=\left(\frac{x^2+y^2}{b}\right)^2-\left(x-\frac{a}{b}\sqrt{x^2+y^2}\right)^2, \\ y^2=\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{x^2+y^2}{b}\right)^2-\left(x-\frac{a}{b}\sqrt{x^2+y^2}\right)^2, \\ y^2=b^2-x^2\,. \end{cases}$$

Iš čia matom, kad elementarės trigonometriškos sistemos charakterizuojasi trimis kreivėmis kiekviena; kai kurios iš tų kreivių yra labai painios ir aukštų laipsnių.

Dar painesnių kreivių gautumėm, jei su kai kuriais senesniais matematikais be septynių elementarių trigonometriškų funkcijų s, c, t, k, z, q, r, laikytumėm elementarėmis funkcijomis dar dvi, būtent sinąversą v ir kosinąversą w, nustatyti lygybėmis:

$$(188)\quad \begin{cases} \sin\text{vers}=1-\cos=\frac{v}{r}=\frac{r-c}{r}\,, \\ \cos\text{vers}=1-\sin=\frac{w}{r}=\frac{r-s}{r}\,. \end{cases}$$

Tuomet visų elementarių trigonometriškų sistemų būtų nebe 28, bet 45. Tos naujos 17 turės taipgi po tris jas charakterizuo-

jančias linijas (sinusales, tangensales ir kotangensales). Štai jų lyginiai:

29. $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{v=a}$

(189)
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-x=a\,, \\ x-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=a\,, \\ y=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=a\,. \end{cases}$$

Bendresnėje sistemoje $S_{\varphi=\alpha}^{v=a}$ tie lyginiai įgaus išvaizdą:

(190)
$$\begin{cases} y^2\sin^2\alpha=y^2-(x-\sqrt{x^2+y^2}+a)^2\sin^2\alpha\,, \\ y^2\sin^2\alpha=y^2-(x-r)^2\sin^2\alpha, \text{ kame } r \text{ gaunama iš lyg.} \\ \qquad r^2=(r-a)\sqrt{x^2+y^2}\,, \\ y^2\operatorname{ctg}\alpha=xy-(y-a\sin\alpha)\sqrt{x^2+y^2}\,. \end{cases}$$

30. $S_{v=b}^{r=a}$

(191)
$$\begin{cases} y^2=a^2-x^2\,, \\ y^2=\left(\dfrac{a^2}{a-b}\right)^2-x^2\,, \\ y^2=a^2-\left[x-\left(\dfrac{a-b}{a}\right)\sqrt{x^2+y^2}\right]^2. \end{cases}$$

31. $S_{v=b}^{s=a}$

(192)
$$\begin{cases} y^2=a^2-(x-\sqrt{x^2+y^2}+b)^2\,, \\ y^2=\dfrac{a^2}{r^2}(x^2+y^2)-(x-r), \text{ kame } r \text{ gaunama iš lyg.} \\ r^2=(r-b)\sqrt{x^2+y^2}\,, \\ y^2=a\sqrt{x^2+y^2}-\left[x-\dfrac{(\sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}-b)\sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}}{a}\right]^2 \end{cases}$$

32. $S_{v=b}^{t=a}$

(193)
$$\begin{cases} y^2=\dfrac{a^2(\sqrt{x^2+y^2}-b)^2}{x^2+y^2}-\left[x-(\sqrt{x^2+y^2}-b)\right]^2, \\ y^2=r^2-(x-r)^2, \text{ kame } r \text{ gaunama kaip 31 sistemoj} \\ y^2=r^2-\left(x-\dfrac{r}{a}\right)^2, \text{ kame } r \text{ gaunama iš lyg.:} \\ \dfrac{r^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{a(r-b)}{r}\,. \end{cases}$$

33. $S_{v=b}^{z=a}$

(194)
$$\begin{cases} y^2=\left(\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4ab}}{2}\right)^2-x^2\,, \\ y^2=a^2-x^2\,, \\ y^2=r^2-\left[x-\left(\dfrac{r-b}{r}\right)\sqrt{x^2+y^2}\right]^2, \text{ kame } r \text{ gaunama iš lyg.:} \\ a(r-b)=r^2\,. \end{cases}$$

34. $S_{v=b}^{c=a}$

(195)
$$\begin{cases} y^2=(a+b)^2-x^2\,, \\ y^2=\left(\dfrac{a+b}{a}\right)^2\left[(a+b)^2+a^2-\dfrac{2a(a+b)x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]^2- \\ \qquad -(x-a-b)^2\,, \\ y^2=(a+b)^2-\left(x-\dfrac{a\sqrt{x^2+y^2}}{a+b}\right)^2\,. \end{cases}$$

35. $S_{v=b}^{k=a}$

(196)
$$\begin{cases} y^2=\dfrac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2}-b)}{a^2}-\left[x-(\sqrt{x^2+y^2}-b)\right]^2, \\ y^2=\left(\dfrac{r^2}{a}\right)^2-(x-r)^2, \text{ kame } r \text{ gaunama kaip 31 sistemoj} \\ y^2=r^2-(x-r)^2, \text{ kame } r \text{ gaunama iš lyginio:} \\ ar=(r-b)\sqrt{x^2+y^2}\,. \end{cases}$$

36. $S_{v=b}^{q=a}$

$$(197)\quad \begin{cases} y^2=\left(\dfrac{x^2+y^2}{a}\right)^2-[x-(\sqrt{x^2+y^2}-b)]^2\,, \\ y^2=\dfrac{r^6}{a^2(r-b)^2}-(x-r)^2\text{, kame } r \text{ gauname kaip} \\ \qquad 31 \text{ sistemoj} \\ y^2=a^2-x^2\,. \end{cases}$$

37. $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{w=a}$

$$(198)\quad \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-y=a \quad \text{arba} \quad y=\dfrac{x^2-a^2}{2a}\,, \\ x-\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=a \quad \text{„} \quad y=\dfrac{x(x-a)}{\sqrt{a(2x-a)}}\,, \\ y-\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=a \quad \text{„} \quad x=\dfrac{y\sqrt{a(2y-a)}}{y-a}\,. \end{cases}$$

Bendresnėje sistemoje $S_{\varphi=\alpha}^{w=a}$ lyginiai (198) atrodys šiaip:

$$(199)\quad \begin{cases} y=(\sqrt{x^2+y^2}-a)\sin\alpha\,, \\ y(x-y\operatorname{ctg}\alpha)=(x-y\operatorname{ctg}\alpha-a)\sin\alpha\sqrt{x^2+y^2}\,, \\ y^2=\sqrt{x^2+y^2}(y-a\sin\alpha)\sin\alpha\,. \end{cases}$$

38. $S_{w=b}^{r=a}$

$$(200)\quad \begin{cases} y^2=a^2-x^2\,, \\ y^2=\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2-(x-a)^2\,, \\ y^2=\dfrac{a^4}{(a-b)^2}-x^2\,. \end{cases}$$

39. $S_{w=b}^{s=a}$

$$(201)\quad \begin{cases} y^2=(a+b)^2-x^2\,, \\ y^2=\dfrac{a^2(x^2+y^2)}{(a+b)^2}-(x-a-b)^2\,, \\ y^2=\dfrac{(a+b)^4}{a^2}-x^2\,. \end{cases}$$

40. $S_{w=b}^{t=a}$

$$(202)\quad \begin{cases} y^2=(\sqrt{x^2+y^2}-b)^2-\left[x-\dfrac{(\sqrt{x^2+y^2}-b)\sqrt{(x^2+y^2)}}{a}\right]^2, \\ y^2=a^2-\left(x-\dfrac{b\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-b}\right)^2\,, \\ y^2=r^2-\left(x-\dfrac{r^2}{a}\right)^2\,, \text{ kurie } r \text{ gaunama kaip 31 sistemoje.} \end{cases}$$

41. $S_{w=b}^{z=a}$

$$(203)\quad \begin{cases} y^2=(\sqrt{x^2+y^2}-b)^2-\left(x-\dfrac{x^2+y^2}{a}\right)^2\,, \\ y^2=a^2-x^2\,, \\ y^2=r^2-\left(x-\dfrac{r^3}{a(r-b)}\right)^2\,, \text{ kame } r \text{ gaunama, kaip 31 sistemoje.} \end{cases}$$

42. $S_{w=b}^{c=a}$

$$(204)\quad \begin{cases} y^2=(\sqrt{x^2+y^2}-b)^2-(x-a)^2\,, \\ y^2=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\left(\sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}-b\right)^2- \\ \qquad -\left(x-\sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\,, \\ y^2=r^2-\left(x-\dfrac{ar}{r-b}\right)^2\,, \text{ kame } r \text{ gaunama kaip 31 sistemoje.} \end{cases}$$

43. $S_{w=b}^{k=a}$

$$(205)\quad \begin{cases} y^2=(\sqrt{x^2+y^2}-b)^2-\left(x-\dfrac{a\sqrt{x^2+y^2}-b}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2, \\ y^2=\dfrac{b^2(x^2+y^2)}{a^2(\sqrt{x^2+y^2}-b)^2}-\left(x-\dfrac{b\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-b}\right)^2, \\ y^2=r^2-(x-a)^2, \text{ kame } r \text{ gaunama kaip 31 sistemoje.} \end{cases}$$

44. $S_{w=b}^{q=a}$

$$(206)\quad \begin{cases} y^2=\left(\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4ab}}{2}\right)^2-x^2, \\ y^2=\left(\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4ab}}{2}\right)(x^2+y^2)- \\ \qquad -\left(x-\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4ab}}{2}\right)^2, \\ y^2=a^2-x^2. \end{cases}$$

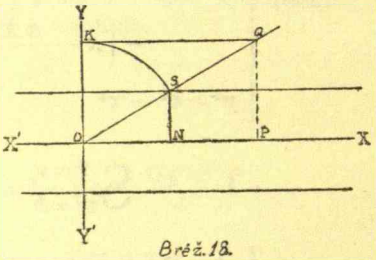
45. $S_{w=b}^{v=a}$

$$(207)\quad \begin{cases} y^2=(\sqrt{x^2+y^2}-b)^2-(x-\sqrt{x^2+y^2}+a)^2, \\ y^2=r^2\left(\dfrac{r-b}{r-a}\right)^2-(x-r)^2, \text{ kame } r \text{ gaunama iš lyg.} \\ \qquad (r-a)\sqrt{x^2+y^2}=r^2, \\ y^2=r^2-\left(x-\dfrac{r-a}{r}\sqrt{x^2+y^2}\right)^2, \text{ kame } r \text{ gaunama} \\ \qquad \text{kaip 31 sistemoje.} \end{cases}$$

Įvesdami dvi naujas funkcijas v ir w į sistemas tipo $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\psi\sigma=a^2}$, $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\psi\pm\sigma=a}$ gautumėm abiem tiem tipam dar po 15 naujų sistemų ir kievienai jų po tris naujas kreives. Bet nenorėdami šio tyrinėjimo perdaug ilginti, tų kreivių lyginius čia apleidžiame. Akylas skaitytojas, prireikus, galės pats sau be vargo juos surasti.

XIII.

Savo veikalėly „Naujos trigonometriškos sistemos, Berlinas, 1922“, mes esam kiek plačiau aprašę dvi naujas sukrautines trigonometriškas sistemas $S\begin{matrix} r^2-c^2=a^2 \\ z^2-t^2=b^2 \end{matrix}$ ir $S\begin{matrix} r^2-c^2=1 \\ s:t=1 \end{matrix}$. Pastaroji atrodė tuo interesinga, kad jai sudaryti užtenka mažesnio funkcijų skaičiaus, būtent tik keturių c, k, q ir r. Dėliai to ji mums atrodė visų prasčiausia. Jos geometriškam vaizdui sudaryti užtenka dviejų tiesiųjų paralelių ašiai XX_1 ir pravestų nuo jos atstogumu lygiu ± 1. Iš sąlygos $r^2-c^2=1$ matom, kad toji sistema turi ir nekintamą siną lygų ± 1 ir prie tam yra stačiakampė. Dvi ją charakterizuojančios kreivės čia virsta tiesiomis ir del sąlygos $s:t=1$ susilieja į vieną. Bet pilnai sistemos charakteristikai, kaip aukščiau matėm, dviejų linijų sinusalės ir tangensalės neužtenka. Ieškokim trečios — kotangensalės. Jai rasti, stipinu OS iš punkto O nubrėžkim lanką SK ir iš punkto K nutieskim KQ, kuri su prailgintu stipinu OS persikirs punkte Q. Geometriškosios to punkto vietos bei kotangensalės lyginys gaunama iš santykių (žiūr. 18 brėž.):



Brėž. 18.

$$(208) \qquad \frac{QP}{OP}=\frac{SN}{ON},$$

dėl trikampių QOP ir SON panašumo. O kadangi čia $QP=y$, $OP=x$, $ON=\sqrt{OS^2-SN^2}=\sqrt{OK^2-1}=\sqrt{y^2-1}$, tai, įstatydami tuos reiškinius (208) lyginin gausime ieškomosios kotangensalės lyginį:

$$(209) \qquad \frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \text{ arba } x=y\sqrt{y^2-1}.$$

Kaip iš (209) matom, jis yra 4-jo laipsnio. Tuo būdu sistemą $S\begin{matrix} r^2-c^2=1 \\ s:t=1 \end{matrix}$ charakterizuoja šių trijų lyginių sistema:

$$(210)\qquad \begin{cases} y = 1\,, \\ y = 1\,, \\ x = y\sqrt{y^2 - 1}\,, \end{cases}$$

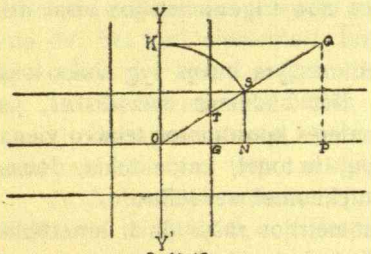
iš kurių pirmasai reiškia tos sistemos sinusalę, antrasai — tangensalę ir trečiasai — kotangensalę.

Lyginių (210) sistemai atsako nun paprastai vartojamoje trigonometrijos sistemoje $S_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{r=1}$ šis trejetas lyginių:

$$(211)\qquad \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2}\,, \\ x = 1\,, \\ y = 1\,. \end{cases}$$

Sulyginę (210) su (211), matom, jog šioj pastaroj lyginių sistemoj yra kur kas mažiau painumo, negu (210) lyginiuose.

Sistema $S_{z^2 - t^2 = b^2}^{r^2 - c^2 = a^2}$ bus taipgi stačiakampė su nekintamu sinu lygiu $\pm a$. Kintamų funkcijų joj tebus tik šešios: c, t, z, k, q ir r. Bet ši pastaroji čia suskįla į dvi: r_1 — pastovią ir lygią $OG = b$ ir kintamą $r_2 = OS$ (žiūr. 19 brėž.). Geometriškąjį tos sistemos vaizdą sudaro dvi tiesios paralelės ašiai XX_1 nutiestos atstogumu $= a$ ir kitos dvi tiesios paralelės ašiai YY_1, nutiestos atstogumu $= b$.



Brėž 19

Tos sistemos kotangensalės lyginys gaunama iš (19 brėž.); jis turės išvaizdą:

$$(212)\qquad \frac{y}{x} = \frac{a}{\sqrt{y^2 - a^2}}\,, \quad \text{arba} \quad x = \frac{y}{a}\sqrt{y^2 - a^2}\,.$$

Tuo būdu sistemą $S_{z^2 - t^2 = b^2}^{r^2 - c^2 = a^2}$ charakterizuoja šis lyginių trejetas:

$$(213) \qquad \begin{cases} y = a\,, \\ x = b\,, \\ x = \dfrac{y}{a}\sqrt{y^2 - a^2}\,. \end{cases}$$

Sulyginę (210) ir (213) su (211), matom irgi, jog šioj pastarojoj sistemoj painiausis lyginys tėra tik 2-jo laipsnio, o (213) sutinkame 4-ojo laipsnio lygtį. Tretieji lyginiai (210) ir (213) reiškia 4-jo laipsnio parabolę. Tuo būdu mūsų paprastoji trigonometrijos sistema prastumo atžvilgiu neturi sau lygios. Visos kitos, tiek elementarės, tiek sukrautinės yra daug painesnės už ją.

XIV.

Pamatinė aukščiau išdėtų tyrinėjimų mintis, trumpai suglaudus, galima išreikšti vienu žodžiu — kreivių trigonometrizacija, arba tikriau sakant, pirmieji tos trigonometrizacijos pradai.

Savo esmėje kreivių trigonometrizacija yra sugretinimas tam tikrų trigonometriškų sistemų su charakterizuojančiomis jas kreivėmis ir algebriškų kreivių su atsakančiomis joms trigonometriškomis sistemomis, nustatąs esmingą sąryšį vienų su kitomis.

Tas sąryšis moksle buvo visai nežinomas. Mat, kreivių teorija ligšiol yra ėjus savais keliais, nuo trigonometrijos visai nepriklausomai.

Tiesa, polerių koordinatų įvedimas yra buvęs lyg šioks toks trigonometrijos jon įsibrovimas. Bet būdamas epizodiškas, jis didesnės reikšmės neturėjo, nes polerės koordinatos tebuvo viena tarp daugelio kitų koordinatų rūšių, ir todėl, kaipo tokia, dominuojančios rolės kreivių teorijoj niekuomet nevaidino.

Vėliau išrastos naujos trigonometrijos rūšys (k. š. hiperbolinė, parabolinė, elipsinė, neuklidinės ir k.) irgi kreivių teorijos žymiai priekin pastumėti negalėjo, nes jų kiekviena, kaipo surišta su ta ar kita kreive, su tuo ar kitu kreivu paviršium, tebuvo vien atskiras, konkretus mokslo faktas, matematiško tyrimo rezultatams bendrinti visai netinkąs.

Net ir tokie apibendrinimai, kaip S. Güntherio, sudariusio naują trigonometriją[1]), dedant jos pamatan kreives tipo

---

[1]) Sk. Dr. Braunmühl Geschichte der Trigonometrie II B. S. 245.

$x^m \pm y^m = 1$, negalėjo turėti didesnės svarbos, nes tos kreivės, kad ir bendresnesnės neg 2-jo laipsnio kreivės tipo $x^2 \pm y^2 = 1$, vis delto, laikydamos trigonometriją, lyg rište prie savęs pririštą, neleido jai laisvai plėtotis ir naujų neištirtų sričių pasiekti.

Iš čia savaime paaiškėjo, kad ėjimas nuo atskirų kreivių prie naujų trigonometrijos rūšių negali vesti prie vaisingų apibendrinimų; jis tegal vien atskirų trigonometrijų skaičių padauginti.

Supratę tai nuo pat pradžios, mes pabandėm eiti visai priešingu keliu: nuo bendros trigonometriškos grupė $G(r, s, c, t, k, z, q, \varphi)$ prie naujų trigonometriškų sistemų ir joms atsakančių kreivių. Tasai metodas pasirodė neapsakomai vaisisingas; jis atidengė moksle naujų akypločių. Išrastos naujos trigonometriškos sistemos nuvedė savaime į ištisą naujų kreivių eilę, parodė jų genetišką giminystę, naujas jų ypatybes, naujus jų brėžimo būdus ir t.t. ir t.t. Tų naujų trigon. sistemų teorija atrodo galinti žymiai pirmyn pastumėti ir pačią kreivių teoriją.

XV.

Žymėjimas naujų trigonometriškų funkcijų naujais simboliais r, s, c, t, k, z, q be savo trumpumo turi dar ir kitų patogumų. Juo remiantis nesunku prieiti naujas, labai patogus žymėjimo būdas elementarių sukrautinių funkcijų, kuriosna įeina dvi bet kuri elementari funkciji, pav. sin+cos, tg+sec, ctg—cosec, 1+sin, 1—tg ir t.t.

Tai atsiekiama šiuo būdu:

1) Duotųjų funkcijų pora išreiškiama atsakomais dviem kuriais simboliais iš tarpo aukščiau nurodytųjų r, s, c, t, k, z, q.

2) Aritmetiški veiksmai, jungiantieji duotąją funkcijų porą, išreiškiama raidėmis o, a, u įterpiamomis dviejų simbolių vidurin. Pirmoji o yra sudėties simbolis (nuo pirmosios raidės lot. žodžio omnis visas), a (nuo lot. a, ab—be) atimties simbolis, ir u (nuo pirmosios raidės žodžio *u*niversus) daugimo simbolis. Tuo būdu sukrautinė funkcija sin+cos bus galima išreikšti simboliu *soc*, tg—sec simboliu *taz*, sin.ctg — *suk* ir t.t.

3) Tiems naujiems simboliams pigu surasti ir atatinkami vardai. Jie susidaro iš sutrumpintų funkcijų vardų rad-, sin-, kos-, tang-, kotang-, sek-, kosek-, įterpiant tarp jų raides o, a, u.

Tuo būdu *socx* bus x'o sinokosas = sinx + cosx, *catx* bus x'o kosatangas = cosx − tgx, *zuqx* — x'o sekukosekas = secx.cosecx ir t.t.

4) Kadangi tokiose funkcijose kaip 1 + sinx, 1 — cosx, 1 + sgx, 1 — secx, vienetas 1 reiškia stipiną (spindulį), tatai simboliškai jos galima išreikšti *rosx*, *racx*, *rotx*, *razx* ir t. t. Tų simbolių vardai bus x'o radosinas, radakosas, radogas, radasekas ir t.t.

Pasigaunant tų naujų simbolių lengva ilgos painios formulos žymiai sutrumpinti. Pav. tesie nūn vartojamosios sistemos $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r=1}$ funkcija:

$$(215)\quad \begin{cases} A_x = \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x = \\ \qquad \dfrac{1 + (\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x)}{\sin x \cos x} \end{cases}$$

Jos diferencialas bus:

$$(216)\quad dA_x = \frac{(\sin x - \cos x)[(1+\sin x)(1+\cos x) - \sin^2 x \cos^2 x]\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

Pasigaunant naujų, aukščiau nurodytų simbolių, form. (215) ir (216) bus galima išreikšti kur kas trumpiau, būtent:

$$(217)\quad A_x = \operatorname{socx} + \operatorname{tokx} + \operatorname{zoqx} = \frac{1 + \operatorname{socx}(1 + \operatorname{sucx})}{\operatorname{sucx}}$$

$$(218)\quad dA_x = \frac{\operatorname{sacx}(\operatorname{rosx} \cdot \operatorname{rocx} - \operatorname{suc}^2 x)\,dx}{\operatorname{suc}^2 x}.$$

Taikant funkcijai:

$$(219)\quad \begin{cases} A_{\pm x} = \sin x - \cos x + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \sec x - \cos x = \\ \qquad = \dfrac{(\sin x - \cos x)(1 + \sin x)(1 + \cos x)}{\sin x \cos x} \end{cases}$$

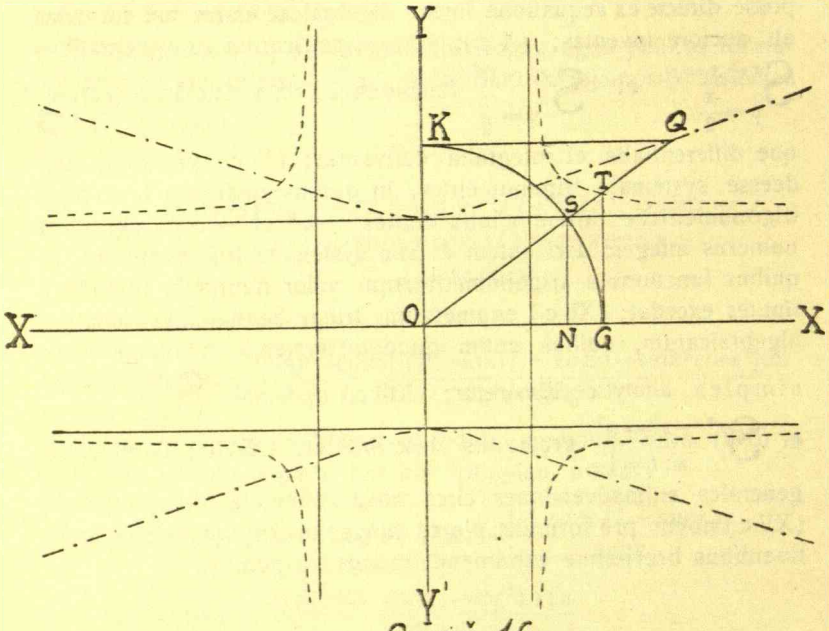
naujus simbolius, gauname dar trumpesnę formulę:

$$(220)\quad A_{\pm x} = \operatorname{sacx} + \operatorname{takx} + \operatorname{zaqx} = \frac{\operatorname{sacx} \cdot \operatorname{rosx} \cdot \operatorname{rocx}}{\operatorname{sucx}}.$$

Šiais pavyzdžiais, tariamės, užtektinai parodę naujų simbolių patogumą. Dėliai to ir drįstame siūlyti matematikams jų vartojimą.

Argumentum. Exposita in priori parte (vide vol. III, 1) thesi de tribus algebraicis liniis, quibus unumquodque systema trigonometricum illustratur, auctor ulterius prosequitur, (VII cap.) demonstrans: cuivis lineae algebraicae respodere non minus quam tria systemata trigonometrica; (VIII c.) e quavis linea algebraica trigonometrica delineatione deduci posse superiorum graduum lineas derivatas; (IX c.) harum derivatarum aequationes deduci posse directe ex aequatione lineae algebraicae datae per formulas ab auctore inventas; (X c.); trigonometricarum in systematibus $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{r+s=a}$ et $S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=a^2}$ functionum natura elucidatur, earumque differentialia et integralia derivantur; (XI c.) probatur, non deesse systemata trigonometrica, in quibus quaedam functiones trigonometricae varientur intra limites $+\infty^n$ et $-\infty^n$, ubi n est numerus integer; dari autem et alia systemata trigonometrica, in quibus functionum trigonometricarum valor nunquam finitudinis limites excedat; (XII c.) enumerantur trinae aequationes linearum algebraicarum, quibus unum quodque systema trigonometricum simplex analytice illustretur; (XIII c.) systemata $S_{z^2-t^2=b^2}^{r^2-c^2=a^2}$ et $S_{s:t=1}^{r^2-c^2=a^2}$ accuratius describuntur; (XIV c.) continentur generales animadversiones circa nova systemata trigonometrica; (XV c.) novus pro formulis plures functiones trigonometricas continentibus brevissime exprimendi modus proponitur.

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{s=a}$$



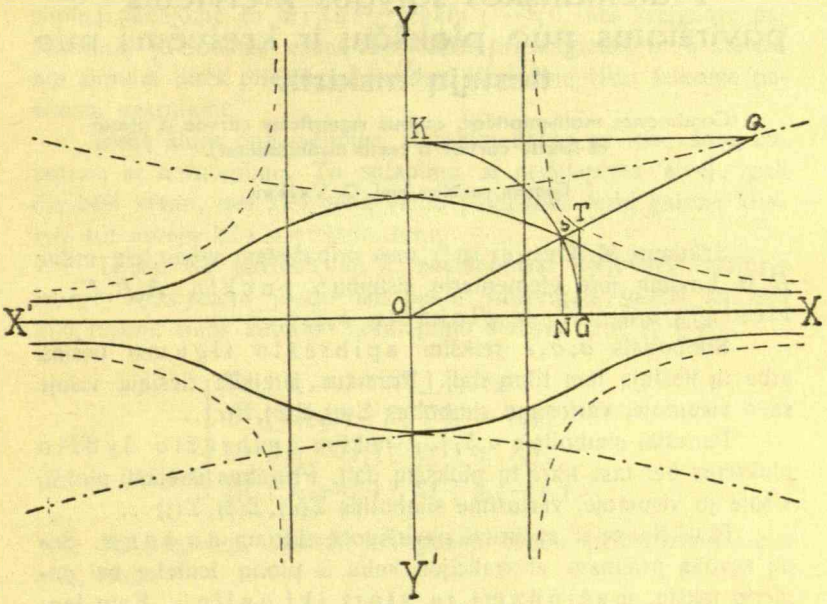
Břež. 16.

$$y = \pm a\,,$$

$$y = \pm \frac{ax}{\sqrt{x^2 - y^2}}\,,$$

$$x = \pm \frac{y}{a}\sqrt{y^2 - a^2}\,.$$

$$S_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{rs=a}$$



Brèž. 17.

$$x=\pm\frac{1}{y}\sqrt{a^4-y^4},$$

$$y=\pm\frac{a^2x}{\sqrt{x^4-a^4}},$$

$$x=\pm\frac{y}{a^2}\sqrt{y^4-a^4}.$$

Garbės Prof. A. Dambrauskas

Matematiškos sąlygos kreiviems paviršiams nuo plokščių ir kreivėms nuo tiesiųjų atskirti.

(Conditiones mathematicae, quibus superficies curvae a plano et lineae curvae a rectis distinguuntur).

Dedama pasiūlius prof. O. Volkui.

Sekdami M. Geiger'iu[1]) mes pripažįstam vienintelę erdvę R ir buvimą joje elementarių sistemų: punktų $A, B, C \ldots$; tiesiųjų $a, b, c \ldots$; ir plokščių $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

Simboliais a, b, c reikšim apibrėžto ilgumo tiesias, arba tų tiesiųjų tam tikrą dalį. Prireikus išreikšti tiesiąją visoje savo visumoje, vartosime simbolius $\Sigma(a), \Sigma(b), \Sigma(c)$..

Panašiai simboliais $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ reikšim apibrėžto dydžio plokščius bei tam tikrą tų plokščių dalį. Prireikus išreikšti plokštį visoje jo visumoje, vartosime simbolius $\Sigma(\alpha), \Sigma(\beta), \Sigma(\gamma) \ldots$

Plokščiuose ir apskritai paviršiuose skiriam du šonu. Šonų sąvoką prieinam abstrakcijos keliu iš plonų lentelių bei popierio lakštų, mažindami jų storį iki nuliui. Kaip lentelėse, taip ir paviršiuose šonai, apskritai tarus, nėra identiški. Taigi jei vieną paviršiaus šoną pažymėsime simboliu $\perp$, tai priešingas jam šonas teks žymėti simboliu $\top$. Tuo būdu viso plokščio α vieną šoną galėsime išreikšti simboliu $\Sigma(\perp\alpha)$, o kitą — $\Sigma(\top\alpha)$.

Jei šonai $\perp\alpha$ ir $\top\alpha$ turi tris vienoj tiesioj negulinčius punktus A, B, C, A_1, B_1, C_1, tai tą dalyką reikšime simboliais $\Sigma({}_{A}{}^{C}\perp_{B}\alpha)$, $\Sigma({}^{A_1}\top_{C_1}{}^{B_1}\alpha)$.

Plokščių bei paviršių visais punktais sutapimą žymėsime ženklu $\equiv$, o jų nesutapimą ženklu $|||$.

---

[1]) M. Geiger, Systematische Axiomatik der Euklidischen Geometrie. Augsburg, B. Filser, 1924, 405.

Priėmę geometrijos elementu tiesiąją, lengvai prieinam ratilo sąvoką, o iš ratilo — **paviršių bei linijų kreivumo** ir to **kreivumo stipinų** $r_1, r_2 \ldots$ sąvokas. Laikom, žinoma, ir linijų bei plokščių perpendikulerumo (statmenumo) sąvoką.

Paviršius kreivumo stipinais $r_1, r_2, r_3 \ldots$ žymėsime simboliais $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3 \ldots$, arba $\Sigma(\alpha_1, r_1)$, $\Sigma(\beta_2, r_2)$ ir t. t., o jų šonus — $\Sigma(\perp\alpha_1, r_1)$, $\Sigma(\top\alpha_1, -r_1)$ ir t. t. Pastarajame simboly kreivumo stipiną padėjome su **minuso** ženklu $(-r_1)$, nes kreivuose paviršiuose, jų šonams esant absoliučiai priešingiems, ir jų kreivumo stipinai turės priešingus ženklus. Kreivumą visur laikome pastoviu, nekintamu.

Įvedę šiuos pažymėjimus, žiūrėkim dabar paviršių šonų sutapimo ar nesutapimo. To sutapimo ar nesutapimo atvejų gali čia būti keturi, nes kiekvieną vieno paviršiaus šoną galime klostyti ant abiejų kito paviršiaus šonų.

Teesie du paviršiu α_1, β_1 nevienokiais kreivumo stipinais r_1, r_2. Klostydami juodu tais pat ir priešingais šonais ant kits kito, rasime šiuos keturius nesutapimo atvejus (prie $r_1 \neq r_2$):

$$(1)\qquad \begin{cases} \Sigma(\perp\alpha_1, r_1) \;|||\; \Sigma(\perp\beta_1, r_2), \\ \Sigma(\perp\alpha_1, r_1) \;|||\; \Sigma(\top\beta_1, -r_2), \\ \Sigma(\top\alpha_1, -r_1) \;|||\; \Sigma(\perp\beta_1, r_2), \\ \Sigma(\top\alpha_1, -r_1) \;|||\; \Sigma(\top\beta_1, -r_2). \end{cases}$$

Nūn tesie $r_1 = r_2$, tuomet klostydami tuodu paviršiu ant viens kito, rasim:

$$(2)\qquad \begin{cases} \Sigma({}_{A}^{C}\perp_{B}\alpha_1, r_1) \;|||\; \Sigma({}_{A_1}^{C_1}\perp_{B_1}\beta_1, r_1), \\ \Sigma({}_{A}^{C}\perp_{B}\alpha_1, r_1) \equiv \Sigma({}^{A_1}_{C_1}\top^{B_1}\beta_1, -r_1), \\ \Sigma({}^{A}_{C}\top^{B}\alpha_1, -r_1) \equiv \Sigma({}_{A_1}^{C_1}\perp_{B_1}\beta_1, r_1), \\ \Sigma({}^{A}_{C}\top^{B}\alpha_1, -r_1) \;|||\; \Sigma({}^{A_1}_{C_1}\top^{B_1}\beta_1, -r_1), \end{cases} \quad \text{jei tik } A \equiv A_1, B \equiv B_1, C \equiv C_1$$

Tuo būdu paviršiai lygaus kreivumo **priešingais šonais sutaps, tais pat šonais nesutaps.**

Nūn tesie $r_1 = r_2 = \infty$; kuomet kreivumas $= \frac{1}{r_1^2}$, tapęs lygus nuliui, visai dings, tai ir kreivi paviršiai α_1 ir β_1 virs plokščiais

α ir β. Klostydami juodu tais pat ir priešingais šonais rasim keturius sutapimų atvejus:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma({}_{A}\overset{C}{\perp}{}_{B}\alpha) \equiv \Sigma({}_{A_1}\overset{C_1}{\perp}{}_{B_1}\beta) \\ \Sigma({}_{A}\overset{C}{\perp}{}_{B}\alpha) \equiv \Sigma({}^{A_1}\overset{C_1}{\top}{}^{B_1}\beta) \\ \Sigma({}^{A}\overset{C}{\top}{}^{B}\alpha) \equiv \Sigma({}_{A_1}\overset{C_1}{\perp}{}_{B_1}\beta) \\ \Sigma({}^{A}\overset{C}{\top}{}^{B}\alpha) \equiv \Sigma({}^{A_1}\overset{C_1}{\top}{}^{B_1}\beta) \end{array}\right\} \text{jei tik } A\equiv A_1, B\equiv B_1, C\equiv C.$$

Tuo būdu lygaus kreivumo paviršiai, jei tik kreivumo stipinas yra nustatytas sąlyga $0 \angle r_1 \angle \infty$, teturi tik du sutapimo atveju ir du nesutapimo atveju; tuo tarpu tikri plokščiai turi keturis sutapimo atvejus ir nė vieno nesutapimo atvejo. Kreivi lygaus kreivumo paviršiai tesutampa tik priešingais šonais, o tais pat visiškai nesutampa. Tuo tarpu plokščiai sutampa ir tais pat ir priešingais šonais. Tai yra plokščių esmingas pažymis. Dėliai to lygybės (3) ir galima laikyti plokščių plokštiškumo sąlygomis.

Einant panašiu keliu galima prieiti ir tiesiųjų tiesumo sąlygos. Tam tikslui reikia tik nustatyti tiesiųjų bei šiaip jau linijų šonai. Bet tas dalykas čia yra žymiai sunkesnis, negu plokščiuose. Plokščiai, kaip matėm, teturi tik du šonu, o linijose jų yra begalinė daugybė. Norint tuo įsitikint, užtenka iš paimtos linijos bet kuriuo stipinu nubrėžti aplink paimtąją liniją, kaipo ašį, tam tikrą ratilą. Jungdami ratilo punktus su paimtuoju linijos punktu, mes nustatysim kiekvieną kartą vis atskirus linijos šonus. O kadangi ratile yra punktų begalinė daugybė, tai ir linijoj šonų bus irgi begalinė daugybė.

Žinoma, su begaline šonų daugybe nėr kas veikti. Bet galima su ja ir neturėti jokio reikalo. Mūsų tikslui begalinėje linijos šonų daugybėje užtenka nustatyti keturi atskiri linijos šonai. Tai padaryti visada galima šiuo būdu.

Tesie turimoji linija a_1 kreivumo stipinu r_1. Teguli ji paviršiuje α_1 kreivumo stipinu r_2. Iš bet kurio tos linijos punkto A paviršiuje α_1 nutieskim į liniją a_1 perpendikulerą BAC, abišaliai perkertantį ją. Tas perpendikuleras nustatys linijos a_1 du

šonu AB ir AC, kuriuodu mes ir galėsim, kaip aukščiau, žymėti simboliais $\perp a_1$ ir $\top a_1$.

Toliau iš to pat punkto A nutieskim į paviršių α_1 perpendikulerą DAE perkertantį iš abiejų šalių paviršių α_1 ir tiesiają a_1. Tas perpendikuleras nustatys linijos a_1 du kitu šonu AD ir AE, kuriuodu ir galėsim pažymėt simboliais: $\vdash a_1$ ir $\dashv a_1$.

Jei prie tų simbolių pridėsim raides A ir B, pav. ${}_A\perp_B a_1$, ${}^A\top^B a_1$, $\overset{A}{\underset{B}{\vdash}} a_1$, $\overset{A}{\underset{B}{\dashv}} a_1$, tai tuomi bus pažymėta, jog linijos a_1 šonuose esama dviejų punktų A ir B.

Įvedę šiuos pažymėjimus, imkim nūn dvi liniji a_1, b_1 nevienokiais kreivumo stipinais r_1, r_2. Jei mes nūn klostysime vienos linijos visus keturis šonus ant kiekvieno iš keturių kitos šonų, taip kad du judviejų punktu A ir A_1, B ir B_1, arba nors vienas jų sutaptų, tai pilno visais punktais tų linijų sutapimo nebus nė sykio. Sutapimo vieton gausim šešioliką nesutapimo atvejų, būtent:

$$
(4)\quad
\begin{cases}
\Sigma(\perp a_1, r_1) \equiv \Sigma(\perp b_1, r_2), \\
\Sigma(\perp a_1, r_1) \equiv \Sigma(\top b_1, -r_2), \\
\Sigma(\perp a_1, r_1) \equiv \Sigma(\vdash b_1, r_2), \\
\Sigma(\perp a_1, r_1) \equiv \Sigma(\dashv b_1, -r_2), \\
\Sigma(\top a_1, -r_1) \equiv \Sigma(\perp b_1, r_2), \\
\Sigma(\top a_1, -r_1) \equiv \Sigma(\top b_1, -r_2), \\
\Sigma(\top a_1, -r_1) \equiv \Sigma(\vdash b_1, r_2), \\
\Sigma(\top a_1, -r_1) \equiv \Sigma(\dashv b_1, -r_2), \\
\Sigma(\vdash a_1, r_1) \equiv \Sigma(\perp b_1, r_2), \\
\Sigma(\vdash a_1, r_1) \equiv \Sigma(\top b_1, -r_2), \\
\Sigma(\vdash a_1, r_1) \equiv \Sigma(\vdash b_1, r_2), \\
\Sigma(\vdash a_1, r_1) \equiv \Sigma(\dashv b_1, -r_2), \\
\Sigma(\dashv a_1, -r_1) \equiv \Sigma(\perp b_1, r_2), \\
\Sigma(\dashv a_1, -r_1) \equiv \Sigma(\top b_1, -r_2), \\
\Sigma(\dashv a_1, -r_1) \equiv \Sigma(\vdash b_1, r_2), \\
\Sigma(\dashv a_1, -r_1) \equiv \Sigma(\dashv b_1, -r_2),
\end{cases}
$$

Nūn teesie $r_1 = r_2$ ir $0 < r_1 < \infty$, tuomet gausim:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\Sigma\left({}_{A}\perp_{B} a_1, r_1\right) \Vdash \Sigma\left({}_{A_1}\perp_{B_1} b_1, r_1\right), \\
\Sigma\left({}_{A}\perp_{B} a_1, r_1\right) \equiv \Sigma\left({}^{A_1}\top^{B_1} b_1, -r_1\right), \text{ jei tik } A \equiv A_1 \text{ ir } B \equiv B_1 \\
\Sigma\left({}_{A}\perp_{B} a_1, r_1\right) \Vdash \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{A_1}{\vdash}} b_1, r_1\right), \\
\Sigma\left({}_{A}\perp_{B} a_1, r_1\right) \equiv \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{A_1}{\dashv}} b_1, -r_1\right), \text{ jei tik } A \equiv A_1 \text{ ir } B \equiv B_1 \\
\\
\Sigma\left({}^{A_1}\top^{B_1} a_1, -r_1\right) \equiv \Sigma\left({}_{A_1}\perp_{B_1} b_1, r_1\right), \text{ jei tik } A \equiv A_1 \text{ ir } B \equiv B_1 \\
\Sigma\left({}^{A_1}\top^{B_1} b_1, -r_1\right) \Vdash \Sigma\left({}^{A_1}\top^{B_1} b_1, -r_1\right), \\
\Sigma\left({}^{A_1}\top^{B_1} a_1, -r_1\right) \equiv \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{A_1}{\vdash}} b_1, r_1\right), \text{ jei tik } A \equiv A_1 \text{ ir } B \equiv B_1 \\
\Sigma\left({}^{A_1}\top^{B_1} a_1, -r_1\right) \Vdash \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{A_1}{\dashv}} b_1, -r_1\right), \\
\\
\Sigma\left(\underset{B}{\overset{A}{\vdash}} a_1, r_1\right) \Vdash \Sigma\left({}_{A_1}\perp_{B_1} b_1, r_1\right), \\
\Sigma\left(\underset{B}{\overset{A}{\vdash}} a_1, r_1\right) \equiv \Sigma\left({}^{A_1}\top^{B_1} b_1, -r_1\right), \text{ jei tik } A \equiv A_1 \text{ ir } B \equiv B_1 \\
\Sigma\left(\underset{B}{\overset{A}{\vdash}} a_1, r_1\right) \Vdash \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{A_1}{\vdash}} b_1, r_1\right), \\
\Sigma\left(\underset{B}{\overset{A}{\vdash}} a_1, r_1\right) \equiv \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{A_1}{\dashv}} b_1, -r_1\right), \text{ jei tik } A \equiv A_1 \text{ ir } B \equiv B_1 \\
\\
\Sigma\left(\underset{B}{\overset{A}{\dashv}} a_1, -r_1\right) \equiv \Sigma\left({}_{A_1}\perp_{B_1} b_1, r_1\right), \text{ jei tik } A \equiv A_1 \text{ ir } B \equiv B_1 \\
\Sigma\left(\underset{B}{\overset{A}{\dashv}} a_1, -r_1\right) \Vdash \Sigma\left({}^{A_1}\top^{B_1} b_1, -r_1\right), \\
\Sigma\left(\underset{B}{\overset{A}{\dashv}} a_1, -r_1\right) \equiv \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{A_1}{\vdash}} b_1, r_1\right), \text{ jei tik } A \equiv A_1 \text{ ir } B \equiv B_1 \\
\Sigma\left(\underset{B}{\overset{A}{\dashv}} a_1, -r_1\right) \Vdash \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{A_1}{\dashv}} b_1, -r_1\right),
\end{array}
\right. \tag{5}
$$

Vadinas, čia bus aštuoni sutapimo ir aštuoni nesutapimo atvejai. Sutaps priešingi bei nevienodi šonai, nesutaps tiepat bei vienodi šonai.

Nūn tesie $r_1 = r_2 = \infty$. Tuomet paviršių α_1 ir β_1 kreivumai $\frac{1}{r^2_1}$, $\frac{1}{r^2_2}$ bus lygūs nuliui ir paviršiai α_1 ir β_1 virs plokščiais α, β. Linijos a_1 ir b_1, netekę savo kreivumo, virs tiesiomis a, b ir jų šonų santykiai, išreikšti formulomis (5) virs visiško sutapimo pažymėjimais.

$$
(6)\quad \left\{\begin{array}{l}
\Sigma\left({}_{A}\perp_{B}\, a\right) \equiv \Sigma\left({}_{A_1}\perp_{B_1} b\right) \\
\Sigma\left({}_{A}\perp_{B}\, a\right) \equiv \Sigma\left({}^{A_1}\top^{B_1} b\right) \\
\Sigma\left({}_{A}\perp\, {}_{B} a\right) \equiv \Sigma\left(\underset{A_1}{\overset{A_1}{\vdash}} b\right) \\
\Sigma\left({}_{A}\perp_{B} a\right) \equiv \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{A_1}{\dashv}} b\right) \\
\\
\Sigma\left({}^{A}\top^{B}\, a\right) \equiv \Sigma\left({}_{A_1}\perp_{B_1} b\right) \\
\Sigma\left({}^{A}\top^{B}\, a\right) \equiv \Sigma\left({}^{A_1}\top^{B_1} b\right) \\
\Sigma\left({}^{A}\top^{B} a\right) \equiv \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{A_1}{\vdash}} b\right) \\
\Sigma\left({}^{A}\top^{B} a\right) \equiv \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{A_1}{\dashv}} b\right) \\
\\
\Sigma\left(\underset{B}{\overset{A}{\vdash}} a\right) \equiv \Sigma\left({}_{A_1}\perp_{B_1} b\right) \\
\Sigma\left(\underset{B}{\overset{A}{\vdash}} a\right) \equiv \Sigma\left({}^{A_1}\top^{B_1} b\right) \\
\Sigma\left(\underset{B}{\overset{A}{\vdash}} a\right) \equiv \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{A_1}{\vdash}} b\right) \\
\Sigma\left(\underset{B}{\overset{A}{\vdash}} a\right) \equiv \Sigma\left(\underset{B_1}{\overset{L_1}{\dashv}} b\right)
\end{array}\right\} \text{ jei tik } A \equiv A_1 \text{ ir } B \equiv B_1
$$

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma\left(\overset{A}{\underset{B}{\dashv}}\, a\right) \equiv \Sigma\left({}_{A_1}\!\perp_{B_1} b\right) \\ \Sigma\left(\overset{A}{\underset{B}{\dashv}}\, a\right) \equiv \Sigma\left({}^{A_1}\!\top^{B_1} b\right) \\ \Sigma\left(\overset{A}{\underset{B}{\dashv}}\, a\right) \equiv \Sigma\left(\overset{A_1}{\underset{B_1}{\vdash}}\, b\right) \\ \Sigma\left(\overset{A}{\underset{B}{\dashv}}\, a\right) \equiv \Sigma\left(\overset{A_1}{\underset{B_1}{\dashv}}\, b\right) \end{array}\right\} \text{ jei tik } A \equiv A_1 \text{ ir } B \equiv B_1$$

Formulos (6) parodo, kad tiesiosios, dviem jų punktam sutampant, sutampa visais keturiais savo šonais, sudarydamos 16 sutapimo atvejų ir nė vieno nesutapimo atvejo. Tai yra esminga vienų tik tiesiųjų ypatybė, kurios nerasime nė vienoje kreivėje. Populeriškai kalbant, tąją ypatybę galime išreikšti žodžiais: tiesioji yra linija, kuri nesibaigiamai besitęsdama išlaiko visur tą pačią kryptį, nenukrypdama nuo jos nei dešinėn nei kairėn, nei aukštyn, nei žemyn. Šią mintį, rodos, ir turėjo omeny Euklidas, apibrėždamas tiesiąją, kaipo Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἥτις ἐξ ἴσου ἐφ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται, t. y. gulinčią savyje lygiai visų savo punktų atžvilgiu. Dėliai to aukščiau išvestos formulos (3) griežtai apibrėžia vien euklidinį plokštį, ir form. (6) — vien euklidinę tiesiąją. Lobačevskio ir Riemanno plokščiams pritaikinti tegalima tik (2) formulos, o tų dviejų neeuklidistų tiesioms — vien (5) form.

Kadangi plokščiui nustatyti užtenka 4 santykių, o tiesiąjai reikia 16, tai iš čia matom, kad tiesiosios sąvoka yra daug painesnė negu plokščio. Bet jei atidžiau prisižiūrėsim formuloms (3) ir (6), tai lengvai pastebėsime, jog plokščiui nustatyti užtenka iš (3) imti tik dvi pirmutinės formulos, o tiesiąjai — iš (6) tik keturios pirmutinės. Tuo būdu plokščių — plokštiškumo ir tiesiųjų — tiesumo sąlygos duodas žymiai suprastinamos.

Šiuomi papildyta mūsų straipsnis „Kas yra tiesioji linija", įdėtas L. U. M. G. F. D. III, 1 toman[1]).

14-X-27.

---

[1]) *Argumentum* Distinctis in superficie duobus, in linea quattuor lateribus, introductisque ad ea denotanda peculiaribus mathematicis signis, auctor tradit quattuor mathematicas conditiones, quibus superficies curvae a plano, et sedecim conditiones, quibus lineae curvae a rectis distingui queant. Hae conditiones postea ad duas et quattuor respective reducuntur.

Meteoritas, kritęs Lietuvoje 1929 metų vasario mėn. 9 dieną.

I.

Prof. K. Sleževičius.

Meteorito ieškojimas.

1929 m. vasario mėn. 13 d. Lietuvos laikraščiuose pasirodė tokio turinio žinia: „Vasario mėn. 8 d. naktį Vabalninko ($\varphi = 66^0$; $\lambda = 24^0 50'$) apylinkėje Šukonių durpynan nukrito meteoritas. Jis esąs didumo sulig dideliu namu, kažkokios medžiagos. Krisdamas, perpus sulindęs į durpyną". Susižinojus telefonu bei telegrafu su Vabalninku, Biržais ir kitomis tos apylinkės vietomis, paaiškėjo, kad niekas nukritusio meteorito nėra radęs, bet tą naktį apie 0—1 val. visi, kas dar nemiegojo, esą matę stiprią šviesą bei girdėję ūžimą, kiti net trenksmą. Visų laikraščių šaltinis buvo tas pats vaiko pasakojimas mokykloje, ką jis buvo girdėjęs iš suaugusių, dalyvavusių vietinio ūkininko vestuvių iškilmėse. Iš laikraščių ir atskirų asmenų pranešimų bei papasakojimų sužinota, kad tą naktį tikrai buvo matyta nepaprasta šviesa; vadinasi, reikėjo daryti žygių tos šviesos šaltiniui surasti. Sutarta paskeblti laikraščiuose toks atsišaukimas:

„Daug kalbų ir spėliojimų yra sukėlęs meteoritas, kurio šviesa buvo matoma naktį šių metų vasario mėn. iš 8 į 9 d. Laikraščiuose pasirodė žinių, nurodančių kritimo vietą. Lietuvos universiteto Matematikos-gamtos fakultete organizavosi komisija, kuri tuoj turėjo vykti šio reiškinio tirtų vietoje; turint galvoje šių laikų sunkų susisiekimą (šalčiai, sniegas), buvo užklausta telefonu ir telegramomis įstaigos ir atskiri asmenys; iš visur gauti atsakymai, kad Vabalninko—Biržų rajone meteoritas nesurastas ir iki šios dienos nėra tikrų žinių apie jo nukritimo vietą.

Iš mačiusiųjų šį šviesos reiškinį ir girdėjusių ūžimą pasakojimų galima spręsti, kad tai buvo nepaprastas reiškinys, ir rei-

kėtų surinkti šiuo reikalu kuodaugiausia žinių, nes vėliau užsimirš ir nepasiliks pėdsakų. Turint tai galvoje, visi mačiusieji ir girdėjusieji apie šį meteoritą prašomi suteikti žinių šiuo adresu: Kaunas, Universitetas, Matematikos-gamtos fakultetas, Geofizikos kabinetas, Kaziui Sleževičiui.

Be ko kita svarbu nurodyti:

1. kurią valandą buvo matoma šviesa ir girdimas trenksmas;
2. kuria linkme jis lėkė (iš vakarų į rytus, iš pietų-vakarų į šiaurės-rytus, ar kita kuria linkme);
3. mačiusiojo pavardė ir smulkus adresas.

Kiekviena, nors smulkiausia žinutė, bus priimta su didžiausiu dėkingumu. Juo daugiau bus surinkta medžiagos, juo aiškesnis bus vaizdas. Didžiausios paramos laukiama iš mokyklų".

Šį atsišaukimą atspausdino visi Lietuvos laikraščiai.

Iš viso gauta virš 100 pranešimų raštu; kiti papasakojo žodžiu. Iš surinktosios medžiagos pirmoje eilėje nustatyta, kad šviesa buvo matyta **visoje Lietuvoje**. Žemiau dedu laiškų numerius, kuriuose aiškiai pažymėta ne tik pats šviesos matymo faktas, bet nurodyta ir linkmė.

1. Klaipėdos kraštas: Nr. 9 ir 26
2. Kretingos apskritis: Nr. 16 ir 58;
3. Tauragės „ Nr. 14;
4. Telšių „ Nr. 28 ir 60;
5. Mažeikių „ Nr. 62;
6. Šiaulių „ Nr. 21, 22, 24, 25, 30, 44 ir 97;
7. Kauno „ Nr. 5, 6, 10, 19 ir 45;
8. Šakių „ Nr. 17 ir 69;
9. Vilkaviškio „ Nr. 50;
10. Seinų „ Nr. 27 ir 93;
11. Alytaus „ Nr. 46 ir 57;
12 Trakų „ Nr. 8, 23, 32 ir 47;
13. Ukmergės „ Nr. 18, 34, 48, 51, 54, 59 ir 70;
14. Utenos „ Nr. 36, 55 ir 65;
15. Zarasų „ Nr. 33;
16. Rokiškio „ Nr. 11, 12, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 55, 56 ir 95;
17. Biržų „ Nr. 20, 52 ir 91;
18. Panevėžio „ Nr. 13, 15, 29, 31, 35, 49, 64, 67, 68 ir 96.

Toliau reikėjo nustatyti šviesos, arba meteorų lėkimo tikrasis laikas. Šiam reikalui pasinaudota šiais laiškais: Nr. 34 nurodo apie 1 val.[1]); Nr. 59 — 0 val. 50 min.; Nr. 45 — 0 v. 45 min.; Nr. 12 — 0 val. 55 min.; Nr. 9 — **0 val. 45 — 50 min.**; Nr. 65 — 0 val. 50 min.; Nr. 18 — **0 val. 45 min.**; Nr. 10 — **0 val. 36 min.**; Nr. 60 — 0 val. 15 min.; Nr. 47 — 0 val. 30 min.; Nr. 29 — 0 val. 15 min.; Nr. 67. — 0 val. 40—45 min.; Nr. 39 — 0 val. 25 min.; Nr. 56 — 0 val. 35 min..; Nr. 24 — 0 val. 40—50 min.; Nr. 11 — 0 val. 15—20 min.; Nr. 35 — 0 val. 45 min. Didelės reikšmės turi Nr. 20; ten rašoma: „...įvyko tatai šio mėn. (vasario) iš 8 į 9 d. naktį apie 1 val. 30 min. Ėjau iš miesto namo... giedrios nakties tamsumoje matyti buvo horizontas. Elektra pas mus (Biržuose) dega iki pusės pirmos valandos, todėl jokios kitos šviesos be dangaus žvaigždžių niekur nesimatė...“ Vadinasi, galima tvirtinti, kad šviesa pasirodė vėliau pusės pirmos. Abejotinas laikas ir 1 val. 30 min., nes daugiau tokių valandų beveik nenurodyta. Patikimesnieji iš aukščiau parašytų laikų pabraukti. Remdamasis visais tais duomenimis, aš prileidžiu, kad meteoro šviesa buvo matoma *1929 metais vasario mėn. 9 d. 0 val. (45±5) min.* MEZ.

Svarbiausis klausimas buvo meteoritų kritimo vietos susekimas. Savo spėjimus šiuo klausimu esu padaręs iki 1929 m. balandžio mėn. 11 d.[2]); tuo laiku dar neturėta nukritusių meteoritų nė vieno gabalo. Aš čia ir kalbėsiu apie tuos spėjimus. Radus meteoritus, parinkta tik tam tikri laiškai, užklausta iš atskirų vietų papildomų žinių ir tais duomenimis operuoja mano collega doc. B. Kodatis[3]). Šių spėliojimų aprašymą aš laikau svarbiu, nes parodo atsiųstųjų pranešimų svarbią reikšmę, kadangi remiantis jais nustatyta beveik tiksliai vieta, kur vėliau buvo rasti meteoritai. Dauguma laiškus atsiuntusiųjų gana tiksliai nurodė linkmę, kuria jie matė šviesų rutulį, krintantį žemėn. Brėžinys 1 atvaizduoja išvestąsias linkmes: mažaisiais apskritimais paženklintos vietos, iš kur gauti patikimesnieji pranešimai; iš vietų, paženklintų dviem koncentriškais apskritimais, gauta keletas laiškų. Kelios

---

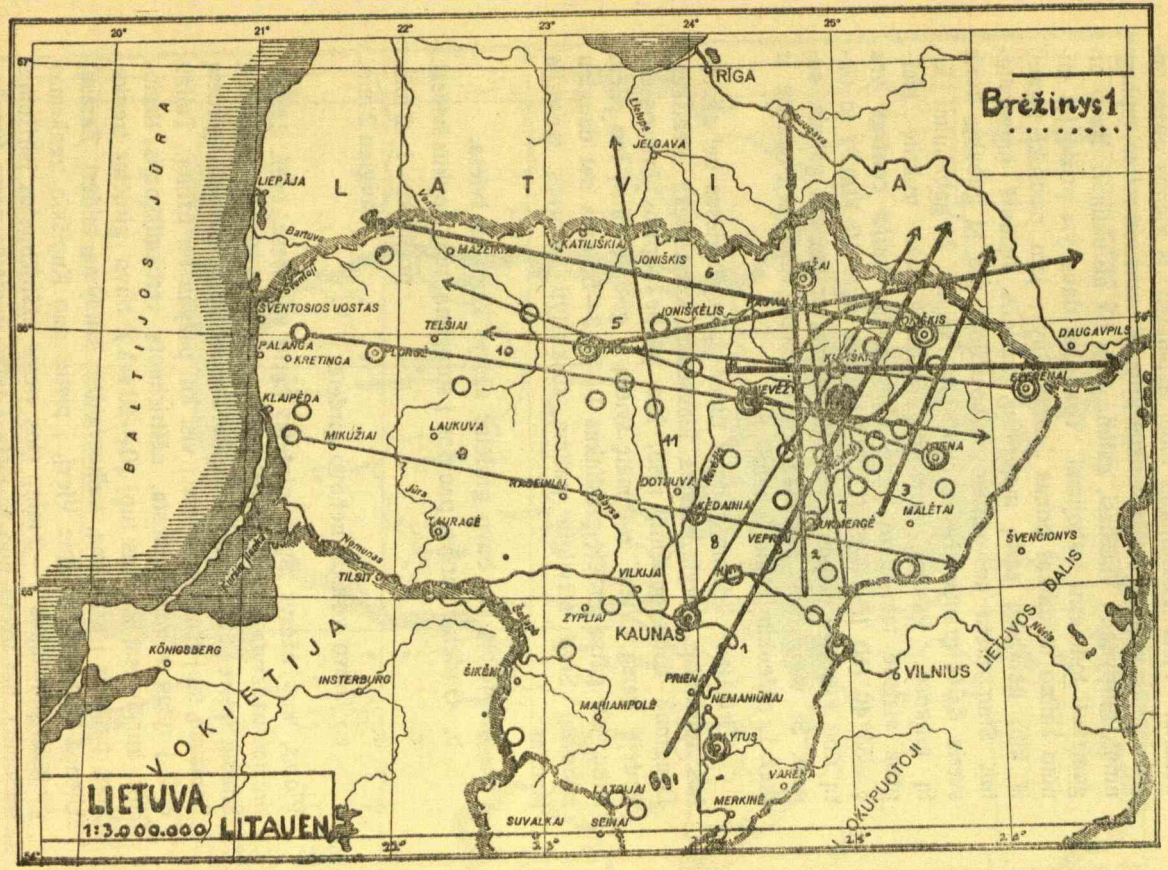
[1]) Apskritai, neminėsiu tų laiškų, kuriuose nurodomas apytikris laikas, vartojamas posakis „apie“; laikau didesnio svorio tų asmenų parodymus, kurie nurodo laiką griežtai; jie, turbūt, pažiūrėjo į laikrodį. Klaida galėjo atsirasti dėl laikrodžio ėjimo.

[2]) Žiūr. „Kosmos“ Nr. 5, pusl. 51.

[3]) Žiūr. žemiau pusl. 13.

lygiagretės linijos pakeistos viena storesne. Storą liniją 3, nubrėžtą į rytus nuo Rokiškio, reikėtų lygiagrečiai nukelti kiek į vakarus, nes iš Utenos apylinkės gauta gana daug pranešimų, ir visi stebėtojai esą matę šviesą toliau į šiaurės-rytus. Iš kitos pusės Rokiškio miesto ir jo apylinkių korespondentai tvirtina, esą, meteoritas nukritęs visai netoli nuo Rokiškio į vakarus. Tiesioji 2, einanti iš Ukmergės vakarinės apylinkės Biržų link, greičiausia reikėtų kiek nukelti į rytus, arčiau prie Kupiškio, nes iš Biržų šviesa buvo matoma daugiau linkme SSE. Šiaulių miesto ir apylinkės stebėtojai matę šviesą į rytus (tiesioji 5), kiek nukrypusią šiaurės link, bet tai prieštarauja Rokiškio miesto stebėtojų parodymams. Vadinasi, toji tiesioji gal eitų nuo Šiaulių tiesiai į rytus. Linija 7, nutiesta iš Biržų Ukmergės link, nors ji apima nedaug stebėjimų, bet jos svoris yra didelis. Rokiškio pašto viršininkas ponas M. Plepys gerai įsidėmėjęs tą vietą dangaus skliaute, kur matė šviesulį, vėliau kartu su gimnazijos direktoriumi ponu M. Krikščiūnu nustatė tos linijos kryptį; vadinasi, ta linija yra svarbi juo labiau, kad ji neprieštarauja kitoms linijoms. Brėžinyje 1 nutiestos visos linijos taip, kaip jos turėtų eiti iš atsiųstųjų laiškų aprašymų. Vėliau dariau pataisas, turėdamas galvoje tik ką nurodytus sumetimus.

Suglaudus visą, kas buvo pasakyta apie linijų linkmes ir, nevienodai vertinant atskirus parodymus, buvo nustatytas meteorito kritimo rajonas: **Rokiškio — Kupiškio — Kamajų apylinkės** su centru, kurio $\varphi = 55^{0}50'$ N ir $\lambda = 25^{0}20'$ E. Ploto radiusas apie 30 klm., kas brėž. 1 paženklinta uždaryta elipso formos linija. Šių spėjimų rezultatai buvo paskelbti per Eltą 1929 m. balandžio mėn. 2 d. ir turėjo kitokias išdavas. Laiškų daugiau beveik negauta, bet pradėta siuntinėti įvairūs akmenys, kurie bent kiek skiriasi nuo kitų, paprastų akmenų. Iš viso gauta apie 10 siuntinių. Kiekvienas atsiųstasis mineralas buvo atydžiai ištirtas, ir rezultatai pranešti siuntėjui, bet meteorito vis nesulaukta. Tik rugsėjo mėn. 1 d. atnešta pora gabalų, kurių išorinis vaizdas buvo visai panašus į akmeninius meteoritus. Paviršutinis analizas parodė, kad neapsirikta, ir komisija iš prof. M. Kaveckio, doc. B. Kodačio, vyr. asist. P. Braždžiūno ir šio straipsnio autoriaus tuoj išvyko į Panevėžio apkr., Andrioniškio valsč. Padvarninkų kaimą, nes to kaimo ūkininkai šienaudami rado aukščiau minėtus meteoritus. Vietoje apklausinėta ūkininkai ir sužinota, kad yra daugiau surasta meteoritų. Atydžiai apeita bent 3 klm.^{2}, bet nieko

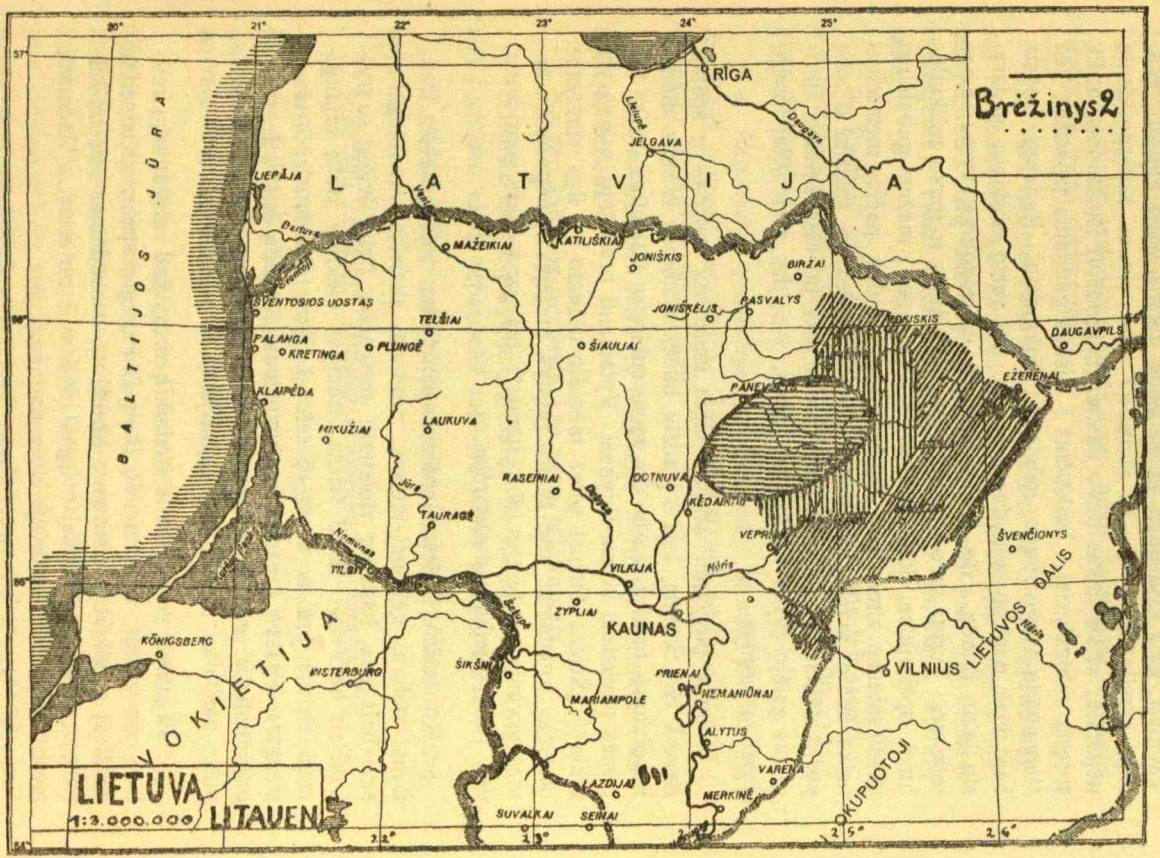

Brėžinys 1
LIETUVA
1:3.000.000
LITAUEN
RĪGA
JELGAVA
LIEPĀJA
L A T V I A
BALTIJOS JŪRA
KATILIŠKIAI
JONIŠKIS
JONIŠKĖLIS
ŠVENTOSIOS UOSTAS
TELŠIAI
PALANGA
KRETINGA
KLAIPĖDA
MIKUŽIAI
LAUKUVA
DAUGAVPILS
MALĖTAI
ŠVENČIONYS
VILKIJA
ZYPLIAI
KAUNAS
VILNIUS
LIETUVOS DALIS
KÖNIGSBERG
INSTERBURG
VOKIETIJA
MARIAMPOLĖ
NEMANIŪNAI
MERKINĖ
SUVALKAI
SEINAI
OKUPUOTOJI
Bartuva
Nemunas
Jūra
Dubysa
Nevėžis
Lielupe
Daugava
Nėris
20°
21°
22°
23°
24°
25°
57°
56°
55°
54°

nerasta. Vieta ieškojimams labai nepalanki: iš vienos pusės suarti laukai, iš kitos pusės tankūs krūmai, samanoti miškai (sphagnum), durpynai. Vadinasi, galima rasti tik atsitiktinai. Buvo organizuoti tolimesni ieškojimai. Ypatingai daug yra prisidėjęs minėto kaimo ūkininkas ponas Juozas Dilys; jam pasisekė išgauti iš kitų ūkininkų rastų meteoritų, kuriuos atsiuntė universitetui. Šiuo metu universiteto dispozicijoje yra 11 gabalų, kurie sveria 3,644 gramų. Be to man yra žinomi 2 gabaliukai kitų rankose. Rastieji meteoritų gabalai buvo nukritę įvairiose vietose tam tikro ploto (Streufeld), kurio **centras yra** $\varphi = 55^0 40'$ **(N) ir** $\lambda = 25^0$ **(E) ir didumas apie 10 klm.**^{2}; jo tikrų ribų nustatyti negalima, nes nežinoma, ar jau visi gabalai surasti. Ši vieta yra aukščiau spėto ploto vakarinėje dalyje ir brėž. 1. paženklinta juodu ratu.

Tirinėjant kritimo vietą ir turint galvoje šviesos bei akustikos reiškinius, iškyla naujas klausimas, kuris lieka neaiškus. Dauguma korespondentų rašo, kad jie be stiprios šviesos esą girdėję garsą. Vieni esą matę šviesą ir girdėję garsą tuo pačiu laiku, kiti garsą girdėję praslinkus 1—2—3—5, arba net daugiau minučių. Šiuo atžvilgiu galima suskirstyti Lietuvos teritorija į zonas:

a. Vietos, kur buvo girdėtas užėsys kartu su šviesa.
b. Girdėtas garsas, panašus į sprogimą, tuoj išnykus šviesai.
c. „ „ „ „ praslinkus 1—2 min.
d. „ „ „ „ „ daugiau 2 min.
e. Garso visiškai nebuvo girdėta.

Plotas, kur užėsys buvo girdėtas kartu su šviesa, brėž. 2. apibrėžtas uždaryta linija ir užštrichuotas horizontališkomis linijomis. Šitame plote tik vienas korespondentas tepraneša apie girdėtą trenksmą, tuoj išnykus šviesai; visi kiti pažymi tik ūžimą. Toliau eina į rytus ir pietus juosta, užštrichuota vertikališkomis tiesiomis, kur šviesai išnykus tuoj (0—60 sek.) buvo girdėtas trenksmas, panašus į griausmą, kulkosvaidžių šaudymą, bildėsį. Zarasų, Utenos apskričiuose, apie Vievį, į pietus nuo Kupiškio trenksmas girdėtas praslinkus 1—2 min. (tos vietos užštrichuotos įstrižomis linijomis), bet toliau nuo tų vietų į rytus ir pietus garsą (trenksmą) girdėjo praslinkus 5, arba net 10 minut.; tas vietas paženklinau mažais kryžiukais. Vakarinėje Lietuvos dalyje tik vienas


Brėžinys 2
RĪGA
JELGAVA
LIEPĀJA
L A T V I J A
MAŽEIKIAI
KATILIŠKIAI
JONIŠKIS
BIRŽAI
SVENTOSIOS UOSTAS
TELŠIAI
JONIŠKĖLIS
PASVALYS
PALANGA
KRETINGA
PLUNGĖ
ŠIAULIAI
DAUGAVPILS
KLAIPĖDA
PANEVĖŽYS
EŽERĖNAI
MIKUŽIAI
LAUKUVA
RASEINIAI
DOTNUVA
KĖDAINIAI
TAURAGĖ
VEPRIAI
ŠVENČIONYS
VILKIJA
ZYPLIAI
KAUNAS
VILNIUS
LIETUVOS DALIS
KÖNIGSBERG
INSTERBURG
ŠIRŠNIAI
PRIENAI
NEMAHIŪNAI
MARIAMPOLE
ALYTUS
VARĖNA
LAZDIJAI
MERKINĖ
SUVALKAI
SEIRIJAI
OKUPUOTOJI
LIETUVA
1:3.000.000
LITAUEN

korespondentas iš Ylakių (Mažeikių apskr.) mini girdėtą trenksmą. Vadinasi, kyla klausimas, kokiu būdu galima buvo girdėti trenksmą praslinkus 3—5—10 minučių? Nei vienas korespondentų neparašė, ar šis laikas buvo tiksliai (laikrodžiu) išmatuotas, ar tik spręsta subjektyviai. Įsiskaičius į laiškus gaunama įspūdžio, kad šiuo atveju vargu buvo naudotasi laikrodžiu. Kadangi trūksta bent kiek patikimesnių duomenų, tai dėl garso reiškinių nedarysiu jokių išvadų. Be to tas neturėjo ir ieškojime vyraujančios reikšmės. Turint savo dispozicijoje tik šviesos ir garso reiškinius buvo spėliojama, kad meteoritas susprogo į mažus gabalėlius aukštesniuose atmosferos sluoksniuose. Radus pačius meteoritus tenka kitaip manyti. Kadangi rastieji meteoritų gabalai iš visų pusių dailiai aplydyti, tai greičiausiai lėkė jų **visa šeima**; sprogimas galėjo įvykti tik kur tai toliau, kai dar meteoritai turėjo didelį greitumą.

Verta pažymėti kritimo metu meteoritų vaizdas ir spalva. Beveik visi tvirtina, kad iš pradžių buvęs matomas šviesus mėnulio didumo rutulys, kuris ties žeme subirėjęs į atskiras dalis; ties žemės paviršium šviesa išnykusi. Vyraujanti pranešėjų mintis yra tokia: „Šviesa buvusi pilno mėnulio didumo su ilga siauresne uodega; artėdamas prie žemės rutulys mažėjęs ir, nepasiekęs žemės, paviršiaus subirėjęs kibirkštėmis“. Yra gana rimtų parodymų, esą, rutulys palikęs nesubirėjęs.

Krintančios šviesos spalva apibūdinta: baltai-melsva, raudonai-melsva, geltonai-melsva, raudona, skaisčiai-raudona, rausvai-balzgana, balta su violetiniu antspalviu, balta šviesa su tryškančiais liežuviais, žaibo šviesa, trumpas elektros laidų sujungimas. Šviesa tęsusis 2—3—5 sek. Laiškai dažniausiai trumpi, stengtasi atsakyti į pastatytus klausimus. Iš tokių laiškų lengviau orientuotis ir priskirti teikiamas žinias tam tikrai rūšiai. Bet nemaža pasitaiko ir vaizdingų aprašymų.

Pagaliau, p. L—ius iš Kėdainių rašo, kad analogingą reiškinį yra matęs 1908 m. P. D—s iš Pagėgių apskr. (Klaipėdos Kraštas) smulkiai aprašo savo įspudžius, stebėdamas šviesos kritimą, „rodos 1907 metais“ (gal 1908 m.? autorius). Vadinasi, meteorų kritimas Lietuvoje nėra naujiena.

Suglaudus visa tai, kas buvo pasakyta, gali kilti klausimas: kokie sumetimai leidžia spėti, kad rastieji „akmenys“ tikrai yra

meteoritai. Tikslesnių duomenų teikia žemiau collega doc. B. Kodatis; aš čia nurodysiu tik pirmiausia krintančius akysna:

1. Visi jie rasti tame plote, kur buvo numatyta, remiantis šviesos ir garso duomenimis.

2. Nors radimo vieta akmenuota, bet jie riškiai krinta akysna savotiška išorine išvaizda. Vietiniai gyventojai lengvai juos atskyrė nuo kitų akmenų; dauguma jų rasta ten, kur kasmet šienaujama; 1928 metais ir anksčiau nieko panašaus nebuvę rasta.

3. Rastieji gabalai buvo įkaitinti iki aukštos temperatūros, nes paviršius dengtas išlydyta medžiaga. Įšildžius iki 1100—1200° pluta netirpsta.

4. Akmenukų paviršiuje yra įdubimų; atrodo, kad skystą medžiagą įspaudė kas pirštu. Tai padarė oro pasipriešinimas į prišakinę lekiančio gabalo dalį.

5. Oro trinimas išlydytą medžiagą išlygino, vietomis, matyti, jos tekėta.

Ne pro šalį bus nurodyti, kas neva prieštarauja.

1. Rasta maža, palyginti, gabalų; be to, komisijai nuvykusiai į kritimo vietą, nepasisekė rasti nė vieno meteorito.

2. Rastieji akmens gulėjo žemės paviršiuje, visai į žemę neįlindę.

Norėčiau atsakyti į kilusius abejojimus papunkčiai.

1. Be nepalankių ieškojimo sąlygų, apie ką jau minėta pusl. 8, galiu nurodyti dar vieną apystovą: yra pagrindo spėti, kad kaikurie vietiniai ūkininkai rastuosius gabalus laiko sau ir universitetui iki šios dienos nėra įteikę.

2. Ne būtina sąlyga, kad kritusieji meteoritai įlistų į žemę; kartais jie nepramuša net, palyginti, plono ledo. Šiuo atveju jie rasti virš velėnos arba storo minkštų samanų sluoksnio. Be to, kritimo metu buvo storai sniego ir velėna stipriai sušalusi; suartose vietose gal jie sulindo į žemę ir dėlto ten narandama. Žodžiu, jokių abejojimų nėra, **kad rastieji gabalai yra tikrai nukritusieji 1929 m. vasario mėn. 9 d. 0 val. 45 min. meteoritai.**

Die Aufsuchung der im Jahre 1929 niedergefallenen Meteoriten.

In der Nacht vom 8. zum. 9. Februar 1929 wurde in Litauen bei ganz heiterem Himmel ein kurzes aber sehr helles Aufleuchten beobachtet. An vielen Orten wurde ein mehr oder minder starker, eigenartiger Schall wie der einer Detonation gehört. Eine bei der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Litauischen Universität zusammengetretene Kommission befasste sich mit der Ursache der Erscheinung. Aus mehr denn 100 eingelaufenen Briefen erhellte, dass die Ursache ein Meteor, oder besser eine Meteorfamilie war, die alles Wahrscheinlichkeit nach die Erdoberfläche erreichte.

Die vorgenommenen Aufsuchungsarbeiten, erleichtert durch recht genaue Augaben einiger Briefe, führten in der Tat zum Ziel. In dem bekanntgemachten wahrscheinlichen Fallgebiete fanden Landleute sonderbare Steine, welche sie der Universität einsandten. Die oben genannte Kommission, bestehend aus Prof. Sleževičius, Prof. Kaveckis, Doz. Kodaitis und dem ersten Assistenten Brazdžiūnas, führten Aufsuchungsarbeiten am wahrscheinlichen Fallorte durch. Nach Verlauf einiger Zeit wurden im ganzen 11 Stücke gefunden.

Die Meteoriten sind 1929^{a} II^{m} q^{d} 0^{h} $45^{m} \pm 5^{m}$ M. E. Z. in einem Gebiete gefallen, dessen Centrum die ungefähren Koordinaten hat: $\varphi = 55^{0}\,40'$; $\lambda = 25^{0}$ (E). Das Streufeld hat einen Umfang von ungefähr 10 klm^{2}. Die genaueren Grenzen sind aber schwer festzustellen, da die Verhältnisse recht schwierige sind, (sehr dichter Hochwald, Ackerland, grosse Flächen sumpfiger Wiesen) und man somit nicht genau weis, ab alle zur Erde gelangten Stücke auch wirklich gefunden wurden.

II.

Doc. B. Kodatis.

Rastųjų meteoritų identifikacija ir orbitos susekimas.

A. Medžiaga.

Geofizikos Katedros vedėjas, ponas prof. Kazys Sleževičius maloniai man patiekė visą jo gautąją medžiagą. Tai buvo 110 laiškų.

Laiškus kritiškai studijavau. Pasiliko 20 laiškų, kuriais buvo galima naudotis, būtent Nr. Nr. 9, 15, 18, 21, 22, 26, 27, 29, 30, 33, 37, 46, 48, 49, 56, 57, 59, 62 ir du laišku be Nr.

17 laiškų naudojausi identifikavimui, 5 laiškais orbitai susekti. Tuo būdu 2 laišku liko vienam ir antram tikslui. Tuodu laišku yra Nr. 15 ir 22.

Visų svarbiausias laiškas yra Nr. 33, parašytas Zarasų pasienio policijos rezervos būrio policininko pono Prano Žilio. Ponas Žilis pastebėjo regimąjį radiacijos punktą. Su ponu Žiliu susirašinėjau ir patikrinau davinius. Kad kiek galima tiksliau susekus reg. punktą, pagaminau to dangaus ploto vaizdą, kuriame ponas Žilis pažymėjo radiacijos punktą. Tuo būdu šis pagrindinis punktas yra patikrintas. Kiti itin svarbūs laiškai yra Nr. Nr. 62, 29, 22, 15. Visos šių laiškų suteiktos žinios tarpusavyje patenkinamai sutinka.

Kliūtis sudaro regimojo lėkimo laikotarpis. Patikimi laikotarpiai svyruoja tarp 4^s ir 5^s. Delto skaičiavau orbitą du kartu, remdamasis ir 4^s ir 5^s.

N 33 tėmijo apsireiškimą Smalvos miestelyje

$$1929^0\ II^m\ 9^d\ 0^h\ 45^m\ MEZ.$$

Smalvos koordinatos yra

$$\varphi\ geogr = 55^0\ 38'\ 51''$$
$$\varphi\ geoc = 55^0\ 28'\ 7''$$
$$\lambda = -\ 26^0\ 20'\ 18'' = -\ 1^h\ 45^m\ 23^s$$
$$\log \rho = 9{\cdot}999\,01\,20$$
$$\text{vienetas} = a = 637\,739\,7\ \text{m (Bessel)}$$

radiacijos punktas iš Smalvos žiūrint

$$AR = 63^0\ 40' = 4^h\ 14^m\ 40^s$$
$$\delta = +\ 20^0$$

Identifikuoti meteorito gabalai buvo surasti Padvarininkų kaimo rytuose. Šio punkto koordinatos yra

$$\varphi \text{ geogr} = 55^0\ 39'$$
$$\varphi \text{ geoc} = 55^0\ 28'\ 7''$$
$$\lambda = -\ 25^0\ 1' = -\ 1^h\ 40^m\ 4^s$$
$$\log \rho = 9{\cdot}999\,01\,20$$
$$h = 102$$
virš vandenyno

Nr. 15 tėmijo, be ko kita ir sustojimo vietos aukštį $= 25^0$, Panevėžyje.

Panevėžio koordinatos yra

$$\varphi \text{ geogr} = 55^0\ 43'\ 48''$$
$$\varphi \text{ geoc} = 55^0\ 33'\ 4''$$
$$\lambda = -\ 24^0\ 22' = -\ 1^h\ 37^m\ 28^s$$
$$\log \rho = 9{\cdot}999\,01\,00$$
$$H = 25^0$$

Nr. 62..... „linkmė: iš viršaus tiesiai žemyn (į žemę) rytuose....“
Reiškia: krito vertikalu, ir delto kryptis ėjo per Ylakių zenitą.

Nr. 22..... „krito jis beveik statmenai....“
Gerai sutinka su Nr. 62.

Nr. 29..... „krito jisai ties mano galva....“
Gerai sutinka su Nr. Nr. 22 ir 61.

Nr. 15..... „krito ne visai stačiai žemyn, bet truputį įstrižai — iš dešinės į kairę....“
Patenkinamai sutinka su Nr. Nr. 62, 22 ir 29.

Tuo būdu ir antroji kryptis yra patenkinamai definuota.

B. Identifikacija.

Daviniai yra tokie, jog tuojau aišku, kad neišsimokėtų naudotis gryno skaičiavimo metodu. Todel naudojausi azimutų susikirtimo metodu. Susektame plote reikėjo surasti: 1) tikimoji vieta, 2) tikimiausioji vieta.

1) Tikimajai vietai susekti dėjau koordinatų sistemą taip, kad lygiai daug azimutalinių spindulių kirstų X-ašį ir Y-ašį. Azimutalinių spindulių kertamųjų punktų abscisas ir ordinatas pa-

žymėjau *mm* ir sudariau aritmetinį vidurkį. Rastąją vietą skaitau tikimuoju punktu.

2) Tikimiausiajai vietai susekti suformulavau patikimybės sąvoką taip: „Tikimiausioji vieta esanti toji, kurios atokumų — nuo azimutalinių spindulių — kvadratų suma sudaro minimumą". Taip suformulavus sąvoką, tiesiosios Hessé's normalinė forma savaime pasisiūlė, kad pasinaudojus jąja. Matavau kampus φ su transportiru ir atokumus pažymėjau *mm*. Tuomet išdygsta štai kokios paklaidų lygtys:

$\cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y = p$
$0{,}73\,x + 0{,}68\,y = 14$
$0{,}44\,x + 0{,}90\,y = 7$
$-0{,}81\,x - 0{,}59\,y = 14$
$-1{,}00\,x + 0\quad y = 50$
$-1{,}00\,x + 0\quad y = 48$
$-1{,}00\,x + 0{,}05\,y = 37$
$-1{,}00\,x + 0{,}04\,y = 5$
$+1{,}00\,x + 0\quad y = 0$
$0{,}79\,x - 0{,}62\,y = 22$
$0{,}79\,x - 0{,}62\,y = 32$
$0{,}84\,x - 0{,}54\,y = 52$
$-0{,}36\,x - 0{,}93\,y = 44$
$-0{,}62\,x - 0{,}79\,y = 56$
$-0{,}17\,x - 0{,}98\,y = 61$
$0\quad x - 1{,}00\,y = 40$

Jų išsprendimas suteikia

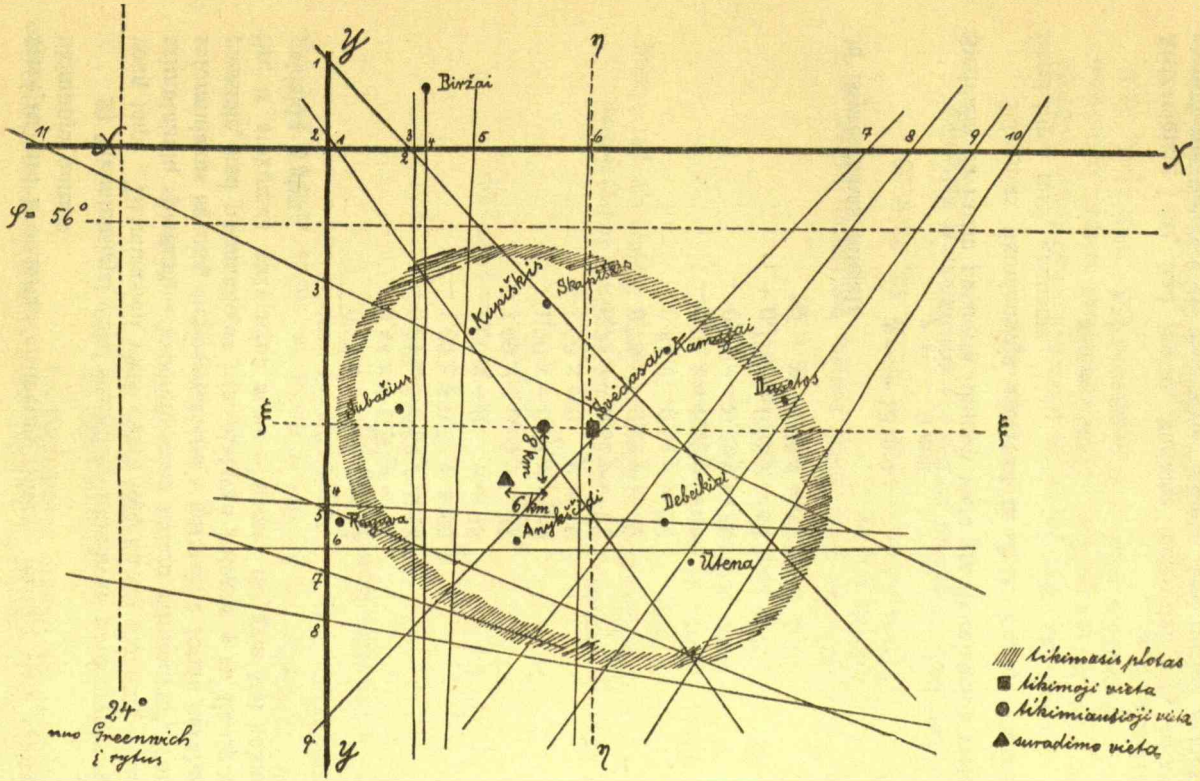
$$x = -13\text{ mm}$$
$$y = 0\text{ mm}$$

Šiedviem daviniam pataisyta tikimoji vieta yra tikimiausioji vieta.

Sulyginus tikimiausiąją vietą su ta vieta, kurioje gabalai tikrai buvo rasti, gaunama

$$\triangle x = -6\text{ km}$$
$$\triangle y = -8\text{ km}$$

Atsižvelgiant į tai, kad laukas, kuriame meteoritai rasti, užima plotą, kurio radiusas yra apie 3 km, aiškėja, kad rastieji akmens iš tikro yra gabalai meteoro, kuris buvo pastebėtas Lietuvoje $1920^{0}\ II^{m}\ 9^{d}\ 0^{h}\ 45^{m}$ MEZ (brėž. 3).


Biržai
Kupiškis
Skapiškis
Kamajai
Švėdasai
Subačius
Dusetos
Debeikiai
Anykščiai
Rėgava
Ūtena
8 km
6 km
φ = 56°
24°
nuo Greenwich
i rytus
tikimasis plotas
tikimoji vieta
tikimiausioji vieta
suradimo vieta

Brež. 3.

C. Orbitos susekimas.

Įvykio sąlygos yra tokios, kad geriausiai tinka Galle's metodas. To metodo nandojausi ta forma, kurią suteikia jai Julius Bauschinger'is veikale „Die Bahnbestimmung der Himmelskörper".

1. *Sustojimo punkto aukštis.*

Išeinant iš davinių

Vietos E (Padvarninkai)	Vietos O (Panevėžys)
$\chi = 55^0\ 39'$	$\varphi = 55^0\ 43'\ 48''$
$\lvert\lambda\rvert = 25^0\ 1'$	$\eta = 24^0\ 22'$
$h = 102$ m	$H = 25^0$

žemės radiusas = 6 377 397 m (Bessel)

$$\lg \rho = 9{\cdot}99\ 901\ 00$$

ir naudojantis formulių sistema

$$\cos s = \sin\varphi \sin\chi + \cos\varphi \cos\chi \cos(\chi - y)$$

$$z = 2\rho \sin\tfrac{1}{2}s \frac{\sin(H + \frac{1}{2}s)}{\cos(H+s)} + h$$

randamas $z = 20\,011$ m.

Apytiksliai skaičiuodami rastumėme tokį davinį: Nuo Panevėžio iki Padvarininkų yra apytikriai 45 km. Kadangi $H = 25^0$, tai $z =$ apytikriai 19 km.

Taigi: meteoras sustojo 20 011 m virš vandenyno lygio, ir nukrito.

2. *Radiacijos ir sustojimo vietos pusiaujinės koordinatos žiūrint iš Smalvos.*

Smalvoje tėmijimo momentas MEZ $= 0^h\,45^m$. Pažvelgus į Smalvos λ, gaunamas vietinis $\odot_{vid.}$ laikas $= 1^h\,30^m\,23^s$. Tuo randasi Smalvoje žvaigždžių laikas $\Theta = 10^h\,44^m\,44^s = 161^0\,11'$; ir valandų kampas $t = 6^h\,30^m\,4^s = 97^0\,31'$. Padvarininkai randasi $1^0\,20'$ (žvaigždžių laiku) į vakarus nuo Smalvos, ir delto Padvarninkuose žvaigždžių laikas $\Theta^0 = 159^0\,51'$. Atokumas $\triangle$ tarp Smalvos ir Padvarninkų = 83000 m. Tais daviniais dygsta iš sistemos,

$$\triangle \cos\delta \cos(\alpha - \Theta) = \rho^0 \cos\varphi^0 \cos(\Theta^0 - \Theta) - \rho \cos$$

$$\triangle \cos\delta \sin(\alpha - \Theta) = \rho^0 \cos\varphi^0 \sin(\Theta^0 - \Theta)$$

$$\triangle \sin\delta = \rho^0 \sin\varphi^0 - \rho \sin\varphi$$

jeigu daviniai be indekso atitinka Smalvai, gi su indeksu ^{0} Padvarninkams

žiūrint iš Smalvos į

sustojimo vietą (Padvarninkai)	radiacijos punktą
$\alpha = 78^0\,11' = 5^h\,12^m\,44^s$	$\alpha' = 63^0\,40' = 4^h\,14^m\,40^s$
$\delta = +11^0\,27'$	$\delta' = +20^0\,0'$

3. *Kelio ilgis atmosferoje.*

Iš žemėlapio išskaityta

$$\tau = 152^0$$
$$\sigma = 21^0\,30'$$
$$\text{trečias } \angle = 6^0\,30' \quad ; \quad \triangle = 83\,000 \text{ m}$$
$$\Sigma = 180^0$$

Vykinant sistemą

$$l = \frac{\triangle \sin\sigma}{\sin(\sigma+\tau)}$$
$$\sin h = \sin\varphi^0 \sin\delta' + \cos\varphi^0 \cos\delta' \cos(\Theta^0 - \alpha')$$
$$\operatorname{tg} C = \frac{l\cos h}{\rho^0 + l\sin h}$$
$$\xi = \frac{l\sin(h + \frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}C}$$
$$z' = z + \zeta$$

gaunama

kelio ilgis atmosferoje $l = 268\,719$ m

radiacijos punkto aukštis $z' = 85\,627$ m

4. *Reliatyvis meteoro greitis.*

$$v = \frac{l}{t}; \quad t = 5^s \text{ ir } 4^s.$$

$t = 5^s$ $\quad v = 53\,744 \text{ msec}^{-1}$;

$t = 4^s$ $\quad v = 67\,180 \text{ msec}^{-1}$.

5. *Tikrasis, žiūrint į žemę, meteoro greitis.*

$$u^2 = w^2 - 2\rho g$$
$$g = 9{,}80 \text{ m}$$
$$\rho = 6\,370\,000 \text{ m (apytikriai)}.$$

Randama del 5^s ; $u = 52\,570 \text{ msec}^{-1}$;

del 4^s ; $u = 66\,240 \text{ msee}^{-1}$.

6. *Zenito atrakcija.*

$$z = 90^0 - h$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{w-u}{w+u} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z$$

$$\zeta = z + \varphi ;$$

pataisytas $h = 90^0 - \zeta$.

Tai vykinus, randama:

del 5^s; $h = 11^0\,58'$

del 4^s; $h = 12^0\,20$.

7. *Apex'o ilgis L.*

$$\omega = 101^0\,13',2 + 1',028\,(t - 1900)$$

$$\frac{e}{\sin 1'} = 57'\,6$$

$$L = \odot - 90^0 + \frac{e}{\sin 1'} \sin (\odot - \omega)$$

$t - 1900 = 29$. Pavertus M.E.Z. $9^d\,0^h\,45^m$ pasauliniu laiku ir interpoliavus $\odot$, randama $\odot = 319^0\,45'\,45''$, ir $L = 229^0\,10'\,15''$.

8. *Regimojo (pataisytojo zenito atrakcija) radiacijos punkto ekliptinės koordinatos l' ir b'.*

Išeinant iš: $h_1 = 11^0\,58'$ del 5^s; $h_2 = 12^0\,20'$ del 4^s;

azimutas $a = 107^0\,30'$ (iš žemelapio susektas)

$= 107^0\ 8'$ (suskaičiuotas)

Smalvos $\varphi_{geogr} = 55^0\,38'\,51''$

$t = 97^0\,31'$

$\varepsilon = 23^0\,27'$

gauname, pirma, pataisytas δ; del 5^s; $\delta_1 = 19^0\,51'\,15''$

del 4^s; $\delta_2 = 20^0\,43'\,57''$

ir iš to

del 5^s	del 4^s
$l'_1 = 65^0\,20'$	$l'_2 = 65^0\,29'$
$b'_1 = -1^0\,22'$	$b'_2 = -0^0\,30'$

9. *Meteoro orbito rūšis.*

Einant iš $l'_1 b'_1$; $l'_2 b'_2$ ir L randama, vykinant sistemą

$$\sin n \sin \gamma = \sin b'$$
$$\sin n \cos \gamma = \cos b' \sin (l' - L)$$
$$\cos n = \cos b' \cos (l' - L)$$

del 5^s	del 5^s
$\gamma_1 = 4^0 54'$	$\gamma_2 = 1^0 47'$
$n_1 = 196^0 13'$	$n_2 = 196^0 19'$

Susekus žemės greitį formula $V^2 = k^2\left(\frac{2}{R} - 1\right)$, dėjus $R = 149\,500\,000$ km, $k^2 = 6{\cdot}47\,116_{-10}$, randama $V = 30\,163$ msec^{-1}. Tuo randama iš $v^2 = u^2 + V^2 - 2uV\cos n$,

del 5^s	del 4^s
$v_1 = 81\,968$ msec^{-1};	$v_1 = 95\,658$ msec^{-1};

Tai yra tikrasis meteoro greitis, žiūrint į saulę.

Jeigu susekamas dydis $v_2{}^0 = \frac{2k^2(M+m)}{v}$; kurios formulos r irgi = astronominiam vienetui, kadangi meteoras susidūrė su žeme, ir $m = 0$, tada išdygsta $v_0 = 42\,095$ msec^{-1}; Sulyginus v_0 su $v_{1,2}$ matome, kad meteoras, bent žemės apylinkėse, ėjo hiperboliniu keliu.

10. *Tikrojo radiacijos punkto ekliptinės koordinatos.*

Susekus s iš $\sin(s - n) = \frac{V}{v}\sin n$, ir vykinus sistemą

$$\cos b \cos (l - L) = \cos s$$
$$\cos b \sin (l - L) = \sin s \cos \gamma$$
$$\sin b = \sin s \sin \gamma$$

gaunama

del 5^s	del 4^s
$l_1 = 59^0 27'$	$l_2 = 60^0 24'$
$b_1 = -0^0 53'$	$b_2 = -0^0 21'$

11. *Orbitos elementai.*

Susektais daviniais randama, kadangi b neigiamas,

$$☊ = 180^0 + ☉ = 139^0 46'.$$

Įžulumas i randamas iš sistemos

$$\cos\eta = \cos b \cos(\odot - l)$$
$$\sin\eta \sin i = -\sin b$$
$$\sin\eta \cos i = -\cos b \sin(\odot - l)$$

būtent

del 5^s	del 4^s
$i_1 = 179^0\,5'$	$i_2 = 179^0\,38'$

hiperbolos pusiauašis dygsta iš $a = \dfrac{1}{\dfrac{v^2}{k^2} - \dfrac{2}{R}}$, kur v reikia pažymėti kmd^{-1}, kadangi k remiasi tuo laiku. Tuomet randama dėl

5^{sec}	4^{sec}
$\lvert a_1\rvert = 0{,}17\,997$ astron. vieneto;	$\lvert a_2\rvert = 0{,}12\,075$ astron. vieneto.

Iš $\sqrt{p} = -\dfrac{R\sin b}{\sin i}\cdot\dfrac{v}{k}$; neigiamai delto, kad b neigiamas, dygsta

del 5^s	del 4^s
$p_1 = 6{,}8505$	$p_2 = 9{,}3004$

astronominių vienetų.

Vykdant $e = \left(1 + \dfrac{p}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ randama del 5^s, $c = 6{,}250$; ir del 4^s, $e = 8{,}830$.

Susekus Θ iš sistemos $e\sin\Theta = \dfrac{p}{R}\operatorname{cotg}\eta$

$$e\cos\Theta = \frac{p}{R} - 1$$

galop randamas $\pi = 180^0 + \odot - \Theta$,

del 5^s, $\pi_1 = 121^0\,44'$; del 4^s, $\pi_2 = 122^0\,18'$.

Tuo būdu randasi:

	del 5^s	del 4^s
$a =$	$-0{,}17\,997$	$-0{,}12\,075$
$p =$	$6{,}8505$	$9{,}30\,04$
$l =$	$6{,}250$	$8{,}833$
$\pi =$	$121^0\,44'$	$122^0\,18'$
$\Omega =$	$139^0\,46'$	$139^0\,46'$
$i =$	$179^0\,5'$	$179^0\,38'$

Orbita: hiperbola
Sustojimo punkto aukštis = 20 011 m
Radiacijos punkto aukštis = 85 627 m
Kelio atmosferoje ilgis = 268 719 m.
} virš vandenyno lygio

Kaunas, 1930 m. sausio mėn.

Bahnbestimmung und Identifikationsbeweis der gefundenen Meteoriten.

Auf Grund des gesichteten Materiale wurde vesucht, eine Bahnbestimmung durchzuführen. Da aber zwischen der Erscheinung und dem Auffinden der ersten Meteoriten mehrere Monate vergangen waren, so musste erst der Identifikationsbeweis angetreten werden, ob die gefundenen Stücke auch tatsächlich der Erscheinung augehären. Dieser Beweis wurde erbracht.

Es ist nicht möglich gewesen, die Flugzeit in der Atmosphäre genauer zu erfassen, sie liegt zwischen 4^s und 5^s. Die Ergebnisse der Rechnung finden zich am Schluss der Seite 149 und am Kopf der Seite 150. Auf Seite 150 bedeutet die Übersetzung:

Sustojimo punkto aukštis . . . . .
Radiacijos punkto aukštis . . . . .
Kelio atmosferoje ilgis . . . . . .
} virš vandenyno lygio

respektive:

Höhe des Hemmungspunktes . . . .
Höhe des Radiationspunktes . . . .
Länge des Weges in der Atmosphäre
} über dem Meeresspiegel.

III.

Prof. M. Kaveckis.

Meteoritų sąstatas ir jų apibūdinimas.

Darydamas tyrinėjimus įvairaus sąstato kūnų, krintančių iš pasaulinės erdvės į žemės paviršių, šios srities mokslas turėjo išdirbti specialinę klasifikaciją ir nomenklatūrą. Šio mokslo evoliucija eina jau nuo senų laikų, nes pasaulio struktūros klausimas yra vienas iš įdomiausių ir jo išsprendimas, matyti, priklauso dar tolimai ateičiai. Žmogus kultūriniame gyvenime dažnai susiduria su šita „medžiaga iš dangaus" ir todel stropiai surinkta toji „medžiaga iš dangaus" davė galimybės padaryti tam tikrą rūšiavimą, tam tikras išvadas ir sukurti tam tikras teorijas.

Neliesiu klausimo šių atskirų gabalų kietos medžiagos įvairaus cheminio sąstato kritimo priežasties, palikdamas tai ponams astronomams, pasitenkinsiu tik tipinga forma, sąstatu ir su tuo susidariusia literatūroje terminologija. Vokiečiai, kaip praktiška tauta, tirdami šį dalyką, išskiria jam atskirą mokslo šaką — meteorų mokslą arba meteorų pažinimą (Meteoritenkunde). Jiems taip pat daugiausia priklauso terminalogijos precizija ryšyje su struktūros forma ir cheminio sąstato skirtumais. Kiti įvairių kraštų specialistai šią mokslo šaką kiek kitaip vadina. Taip Story-Maskelyne „Aërolitics", Shepard „Astrolithology". Vėliau, vieton pavadinimo „Meteoritai" dar vartojami pavadinimai „Aerolitai", „Oro akmenys", „Dangaus akmenys", „Siderolitai", „Uranolitai" ir „Betilijos".

Tirdami vokiečių ir kitų tautų literatūrą, matome, kad nuo seniausių laikų daugiausia vokiečiai yra prisidėję prie šio darbo — ypač sąstato tyrime. Taip pat yra dirbę šioje srityje francūzai, anglai ir kitos tautos. Anglų terminologija yra ne taip tobula, kaip vokiečių. Jie artimo elementarinio sąstato meteoritus jungia į stambesnes grupes. Taip antai, sulig Story-Maskelyne pasiūlymu visus meteoritus dalija tik į 3 grupes: sideritus (meteoritinė geležis), siderolitus (litosideritai ir siderolitai vokiečių) ir aërolitus (chondritai ir achondritai vokiečių).

Francūzai tik paskutiniaisiais laikais pradėjo precizuoti terminologiją. Jie daugiausia prisilaiko šios terminologijos sulig Daubrée: 1. Holosidėres (meteoritinė geležis vokiečių), 2. Syssidėres (litosideritai vok.) ir 3. Sporadosidėres (siderolitai, chondritai, achondritai ir pan. vok.) ir 4. Asidėres (achondritai ir pan. vokiečių).

Kadangi vokiečių terminologija yra tikslesnė ir arčiau apibūdina charakteringas meteoritų struktūras ir sąstato savybes, tai nurodysiu šios terminologijos trumpą evoliuciją ir specifines savybes.

Klasifikacijos ir nomenklatūros svarbesniąją literatūrą galima surasti laikotarpyje, maždaug nuo pradžios XIX šimtmečio iki šių dienų. Taip chronologinė eilė eina:

1807 m. M. Klaproth, Chemische Untersuchung des Gediegen-Eisens.

1848 m. Ch. U. Shepard. Report on meteorites.

1859 m. R. v. Reichenbach. Anordnung und Eintheilung der Meteoriten.

1865 m. G. Rose. Sistematische Eintheilung der Meteoriten.

1863 m. N. S. Maskelyne: Aerolitics.

1867 m. Ch. U. Shepard. New classification of meteorites, with an enumeration of meteoric species.

1867 m. A. Daubrée. Classification adoptée pour la collection de météorites du Muséum.

1870 m. St. Meunier. Établissement des types de roches météoriques.

1883 m. G. Tschermak. Beitrag zur Classification der Meteoriten.

1899 m. E. Weinschenk. Zur Classification der Meteoriten.

1904 m. A. Brezina. The arrangement of collections of meteorites.

Iš šitos literatūros matome, kad iš pradžių meteoritai buvo dalijami į dvi stambi grupi: meteorinė geležis ir meteorinis akmuo. Vėliau išskiriama geležies variacija, kur turi nikelio, tai ta pati meteorinė geležis ir silikatiniai arba akmeniniai

meteoritai. Smulkesnis padalinimas prasideda nuo Shepardo, kuris metalinius meteoritus suskirsto į 9 variacijas.

Toliau Reichenbach meteoritus pradeda skirstyti pagal spalvą ir charakteringą sąstatą į 9 grupes. Šitą Reichenbach'o klasifikaciją patobulino Rose. Tuo pačiu metu t. y. 1863 metais Story-Maskelyne pasiūlė meteorinius akmenis vadinti „aerolitais", meteorinį geležį — „aerosideritu" arba „siderolitu", jei susideda pusiau iš geležies su nikeliu ir silikatu. Vėliau jis aerosideritų vardą sutrumpino į „sideritus", o siderolitus pakeitė „mesosideritais". Ši nomenklatūra pasiliko Anglijoje ir iš dalies Amerikoje iki šių laikų. 1867 metais Shepard pasiūlė šią patobulintą nomenklatūrą:

I. Litolitai: a) eukritiniai (2 variac.), b) diskritiniai (5 var.), c) antracitiniai (2 var.).

II. Ltosideritai: a) pleolitiniai, b) mejolitiniai.

III. Sideritai: a) psatariniai (2 variac.), b) apsatariniai (7 variacijos).

Vokiečių terminologija turėjo įtakos nomenklatūrai Daubrée, kuris išskiria:

A. Sideritai (su met. gelež.)

I. Holosidères (tik iš geležies);

II. Geležį ir silikatus turinčius:

1. Syssidères (masivinė geležis),
2. Sporadosidères (geležis izoliuotuose grūdeliuose),
   a. Polisidères (turtingi geležimi),
   b. Oligosidères (su mažu kiekiu geležies),
   c. Kryptosidères (vos pastebimas geležies kiekis).

B. Asideritai (be laisvos metalin. geležies). Asidéres.

Toliau nomenklatūra tobulinama Meunier ir Rammelsbergo pasiūlymais.

1872 metais Tschermak patiekė meteoritų klasifikaciją, kuri po vardu „Tschermak-Rose nomenklatūros" vartojama iki šiol. Galutiną meteoritų sistematizaciją atliko 1904 metais didelis jų žinovas Brezina, kuris labai smulkias meteoritų variacijas suskirstė sulig struktūros, artimo sąstato ir geležies kiekio, būtent:

I grupė. **Akmeniniai meteoritai.**

Silikatų daugiau negu metalinių dalių.

A. **Achondritai.** Neturtingi geležimi akmenys ir be aiškių apskritų chondrų. (Chondra — tai apvalus lukštinės struktūros branduolis ir dažnai aptrauktas geležies plėvelėmis) — 12 variacijų. (1—12).

B. **Chondritai.** Su aiškiomis iš bronzito, olivino, nikelio geležies apvaliomis arba poliedrinės formos chondromis — 30 variacijų (13—42).

C. **Enstatito-Anortito-Chondritai.** Enstatito, anortito ir nikelio geležies apvalios formos chondromis (43).

D. **Siderolitai.** Pereinamoji forma iš akmeninių į geležinius. Nikelio geležis surišta su pagrindine mase, bet šlife matomos atskiros jos dalelės — 3 variacijos (44—46).

II grupė. **Geležingi meteoritai.**

Metalinių dalių daugiau negu silikatų.

E. **Litosideritai.** Pereinamoji fazė iš akmens į geležį. Silikatas grūduotai-kristalinis. 5 variacijos (47—51).

F. **Oktaedritai.** Geležis su lukštuotu arba okteadro formos skeletu iš stiebuotos, juostuotos arba fliuidalinės medžiagos, kuri, rūkštims veikiant, šlifuotame piūvyje duoda Widmanstätt'o figūras. 14 variacijų (52—65).

G. **Heksaedritai.** Struktūra ir skilimas sulig heksaedro (kūbo). 3 variacijos. (66—68).

H. **Ataksitai.** Vien iš geležies, arba geležis vyrauja. 8 variacijos. (69—76).

Šitam padalinimui į 76 grupes kiek artimas yra Meunier'o paskutiniais laikais padarytas padalinimas (62 grupės).

Dar yra patiekęs savo nomenklatūrą Weinschenk, kuris meteorinius akmenis skirsto į turtingus ir neturtingus geležimi, su anormaline ir normaline struktūra, su chondromis ir be chondrų. Suglaudus visus šitus svarbesnius padalinimus ir rū-

šiavimus pagal Rose—Tschermak—Brezina galima gauti tokią gradaciją:

Geležiniai meteoritai:

A. Meteorinė geležis: I. Grūduota iki tankios geležies; II. Heksaedritai; III. Oktaedritai.
B. Litosideritai.

Akmeniniai meteoritai:

A. Siderolitai.
B. Chondritai.
C. Achondritai.

Pastaraisiais laikais iš akmeninių meteoritų tarpo išskiriama grupė „moldavitų", kurių sąstate metalinės geležies visai nėra, arba sutinkama labai maža.

Kadangi meteoritų sąstatas yra labai nevienodas ir be to, pastebėta, kad, jiems krintant, šis sąstatas dalinai keičiasi, todėl jų išorinė forma ir vidujinė struktūra yra labai įvairi. Meteoritai, kurie turi daugiau iš sunkiųjų elementų grupės, kaip antai: Fe., Co., Ni., o taip pat ir anglį, mažiau oksiduojasi ir dėlto mažiau deformuojasi ir mažiau susprogsta. Tos rūšies meteoritų žmonės kai kada randa labai didelių gabalų, kurių forma dažniausiai esti artima rutulio formai. Silikatiniai meteoritai, ypač tie, kurie turi geležies sulfidų su mažu geležies kiekiu, krisdami smarkiai deformuojasi ir susprogsta į mažus gabalėlius. Stambesni gabalai, einant mechanikos dėsniais, visuomet su didesne inercija nulekia tolimesnį kelią. Užpakalyje gi ir šonuose randamos pailgos ir plokščios formos su aplydytais kampais ir šonais skeveldros. Deformacijai didelės įtakos turi dujų kiekis, kuris, temperatūrai kylant, gaminasi atskirų gabalų viduryje. Tai iššaukia gabalų susprogimą. Šiam reiškiniui neįvykus, gabalų paviršiuje pasigamina susprogusios pūslės pavidalo įdaubos. Visos buvusių pūslių-burbulų įdaubos turi smarkiai aplydytą paviršių ir ypač šonus, o kavernos gilumoje randame net didesnį nesudegusių sulfidų kiekį. Atsižvelgiant į tai galima prileisti, kad meteoritų pagrindinė struktūra yra nevienoda ir todėl, darant medžiagos

ekonomiją, sunku yra vienu cheminiu analizu nustatyti visam meteoritui vienodą sąstatą. Be to, ir lyginamasis svoris rodo sąstato nevienodumą, nes aplydytų dalelių lyginamasis svoris yra visuomet didesnis, negu poringų vidujinių dalių. Remiantis čechų literatūros paskutiniais daviniais galima duoti liepsnos, aplydimo, kritimo trajektorijų ir moldavitų grupės meteorito formos sekančias schemas.

1928 metais Ing. F. Hanuš — vienas iš meteoritų kolekcionierių ir mėgėjų — patalpino „Bulletin international de l'Académie de Sciences de Bohême" — resume savo pranešimo „O moldavitech čili vltavinech z Čech a Moravy" (Le moldavites (tektites) de la Bohême et de la Moravie). Čia jis duoda krintančio kūno liepsnos schemą, iš kurios matome kuomet gaminasi apvali, o kur pailga forma. (Pieš. Nr. 1). Pieš. Nr. 2 duoda vaizdą temperatūros įtakos į aplydyto kūno formos pasikeitimą.

Meteorinių akmenų išorinė išvaizda.

Nr. 1 — pats didžiausias sveria 2128 gramus ir turi apskaldytos netaisyklingos trigonalinės piramidės formą.

Aplydyta viršūnė yra apvalaus guzo formos. Nuo jo eina aštrios briaunos, kurios dėl aplydytos masės nutekėjimo turi smulkių įdaubelių pavidalo skulptūrą.

Užpakalinė dalis apskaldytos (apsprogusios) piramidės turi didesnes, susprogusių pūslių pavidalo, įdaubas. Sluoksnis juodos emalės čia yra storesnis ir geriau užsilikęs ant paviršiaus. Paralėliai vienos briaunos eina siaurų plyšelių eilė aplydytų suskilimų pavidalu. Iš šių suskilimų krypties ir formos atrodo, būk gabalas yra susilydęs iš dviejų vienas prie kito prispaustų atskirų gabalų.

Išorinis meteorito paviršius dėl viršutinės aplydytos plėnelės turi juodo blizgančio kūno išvaizdą. Emalės stikluoto pavidalo viršūtinės plėvelės priduoda išorinio panašumo su storu išdžiūvusiu pokosto sluoksniu, kuris turi raupuotą, susitraukusį paviršių.

Juodos emalės dalys nuo meteorito paviršiaus arba pačios atšoko jam krintant į sniegą ant žemės paviršiaus, arba,

gal būt, radėjų buvo apdaužytos. Apskaldytose vietose matosi pilkos spalvos kristalinė masė su stikliniu blizgėjimu. Vietomis, kur nuo dujų išsiskyrimo susidarė daug apskritų skylelių, masė atrodo bazaltiniai šlakuota. Medžiagos kietumas yra 5,5, o lyginamasis svoris, tur būt, yra tas pats, koks buvo nustatytas gabalui Nr. 3.

Nr. 2 — 589 gr. svorio, daro įspūdžio atskilusio šono nuo gabalo Nr. 1. Jis yra 7,5×9×5 cm. didumo, plokščiai įlenktos — išgaubtos formos. Vienas, matyti, užpakalinis šonas turi labai charakteringas pūslės pavidalo įdaubas iki 15 m/m. gilumo ir 10 m/m. diametro. Skulptūra, ypač trijų įdaubų, yra labai charakteringa, nes ji gaunasi tokia tik tada, kada vyksta skystos masės nuvarvėjimas, duodamas koncentrinius aptekėjimus. Greta šių trijų įdaubų yra viena įdauba su išskilusiu 1,5×2×1,5 cm. didumo gabalu, o pūslės gilumas siekia 14 m/m. Šitoje vietoje dujos, matyti, suskaldė didelį gabalą, o vėliau įvyko aštrių kampų apsilydimas. Priešakinė dalis duoda smailią briauną ir šios juodos emalės nuo briaunų apskaldymas yra didesnis, kaip užpakalinės dalies, nors ten skulptūra yra smulkesnė ir plonesni šonai.

Matyti, priešakinė dalis, ar tai puolant ant žemės, ar tai nuo apsitrynimo dar ore į kitus gabalus, kiek daugiau nukentėjo.

Iš po emalės matosi pilka kristalinė masė su stikliniu blizgėjimu, tik jos sąstate matyti, daugiau tamsesnių dėmių. Petrografinė išvaizda atrodo kiek daugiau stikluota negu medžiagos Nr. 1, be to, dar kita juodesnė, būk putota masė turi daug mažų apskritų gilių skylučių. Juoda emalė užsilikusi geriau, kaip Nr. 1, bet jos išvaizda ta pati. Kietumas — 5,5.

Nr. 3. Gabalas buvo radėjų kiek daugiau apskaldytas ir todel jis pavartotas analizams. Jau be nuskaldytų šonų, jis sveria 292 gramu.

Forma šio gabalo — netaisyklingo tetraedro. Didesnė dalis vieno šono — visai be emalės, kuri, matyti, yra arba nukrapštyta, arba karštam gabalui patekus į sniegą, atsprogo. Emalės spalva, išvaizda ir skulptūra yra ta pati, kaip ir kitų egzempliorių. Didesnių aplydytų įdaubų esama iš dviejų gretimų tetraedro formos plokštumos šonų. Vietose, kur atskilo

emalė, paviršius matinis, juodai pilkos geležies spalvos. Nuskaldytose vietose matyti juodos šlakuotos masės su kapiliarinėmis skylutėmis ir pilkos kristalinės medžiagos — panašios savo petrografine išvaizda į trachitą. Emalės daugiau užsiliko — kur nuskaldžius, iš po jos matyti baltesnė medžiaga. Baltesnės dalies kietumas — 5,5, o juodos stikluotos — 6,5.

Nr. 4. — gražiausias iš viso rinkinio egzempliorius. Turi elepsoidalinę formą su sustorėjimu per ilgesniąją ašį. Visas padengtas ištisu gan storu juodos emalės sluoksniu. Apgadintas jis yra tik dviejose aštriojo galo vietose. (Matyti, radėjų bandyta pažiūrėti, iš kokios jis yra medžiagos). Pilną emalės užsilikimą aš aiškinu tuo, kad šis nedidelis 128,6 gr. svorio ir 65×50×25 m/m. didumo gabalas, be to, dar gan plonas užpakaliniame gale — vos 5—11 m/m. storio, bekrisdamas šaltame (—38°) ore suspėjo visai atvėsti ir todėl, jam pakliuvus į sniegą, emalė neatskilo. Priešakinė dalis 45×28 m/m. didumo turi puikų emalės piešinį. Čia plaukų pavidalo emalės suraukšlėjimo linijos eina statmenai ilgesnės ašies galo. Plokščios formos gabalo šonų viduriu eina sustorėjimas. Nuo jo užpakalinės dalies radiusais tęsiasi aiškios plonos nuvarvėjimo raukšlės. Tas pats matosi ir viename ir kitame šone. Užpakalinė dalis turi smailų galą, kuris nuo aukštos temperatūros, pasidaręs plastingu, matyti, nutrūko, arba susidariusių dujų buvo atplėštas. Be viso atskilusio galo paviršius pilnai apsilydė ir įgijo pailgą trikampio pavidalo formą.

Skersinis piūvis yra taisyklingo rombo su aplydytais galais formos, o išilginis — ištempto į vieną galą lašo pavidalo elipsoido.

Vienoje vietoje, kur emalė yra nuskelta, matosi pilka kristalinė medžiaga, o žiūrint per lupą (×25 kart), galima pastebėti skaidrios stiklo pavidalo masės gabalėlių su stipriai stikliniu blizgėjimu. Medžiagoje paralėliai briaunos eina skilimo plyšys. Šitos vietos kietumas — 5.

Kita be emalės vieta turi bazaltinės lavos išvaizdą. Vienas jos taškas tamsiai rudos spalvos, o visa medžiaga atrodo labai koringa ir yra juodos spalvos. Tokia pat medžiaga matoma ir iš storesniojo galo, kur pamėginau truputį emalės numušti. Kietumas koringos masės — 4—5. Kad nesugadinus

taip gražiai užsilikusio egzemplioriaus su idealiniu emalės paviršiaus piešiniu, nuo tolimesnio skaldymo susilaikiau.

Nr. 5. Suspausto iš dviejų šonų kūgio formos gabalas turi nuo emalės aptrintą iš dviejų šonų priešakinę dalį. Emalės piešinys susideda iš smulkesnio tinklo ir nuo priešakinės — storesnės dalies turi charakteringos krypties nutekėjimo linijas. Priešakinės dalies didumas — 43×34 m/m. ir užpakalinės 32×11 m/m. Ilgis — 55 m/m. Plonas užpakalinis galas turi stambesnį reliefą. Iš po apskaldytų nuo emalės vietų matosi pilka kristalinė masė, o plonajame gale — tamsesnė stikluota medžiaga. Kietumas — 5—6. Svoris 104 gr.

Nr. 6. Meteoritas — formos netaisyklingos kvadratinės piramidės, kurios du šonu turi iš dalies apmuštą nuo emalės sluoksnį. Užpakalinė dalis turi stambesnių suraukšlėjimų, įdaubų ir stipresnio stiklinio blizgėjimo emalę. Manau, kad šio egzemplioriaus užpakalinės dalies masė buvo didesnio svorio, nes atrodo, kad ploni suraukšlėjimai eina nuo aštriojo piramidės galo pagrindo link. Bukasis galas turi 36×38 m/m. didumo, o aukštis siekia 52 m/m. Svoris 98 gr.

Emalės išvaizda visai ta pati, kai ir kitų gabalų. Iš po emalės matosi balsganai pilka kristalinė masė; kūgio viršūnė sudaryta iš tamsesnės medžiagos. Kietumas baltos medžiagos — 5,5, o tamsiai pilkos, kiek šlakuotos, — 6. Viename meteorito šone yra įtrinta rudai geltonos spalvos skaidulinga medžiaga. Po mikroskopinio tyrimo paaiškėjo, kad tai yra medžio žievės skaidulinga masė. (Meteoritas krito miške).

Nr. 7. Medžiaga — netaisyklingos rombinės piramidės formos, deformuota ir su aplydytais suraukšlėjimais. Svoris— 87,3 gr., didumas — 32×33×47 m/m. Apie pusę paviršiaus — be emalės, viena lygi vieta nuo išsikyrusių dujų turi plonas skylutes. Visa masė atrodo daugiau šlakuota, o nuskaldytame be emalės taške matyti tamsiai pilka žvynuotos struktūros kristalinė medžiaga. Emalė tokia pat, kaip ir kitų egzempliorių. Kietumas pilkos medžiagos — 5, o juodos šlakuotos — 6.

Nr. 8. Meteoritas — netaisyklingos tetraedro formos ir 3-se vietose gerokai apdaužytas. Svoris 37,5 gr., o turėtų sverti apie 95 gr. Didumas 33×38×45 m/m. Be apdaužytų vietų — juoda emalė yra užsilikusi gerai. Stambesnių aplydymų ir nuo dujų susidariusių pūslių nėra. Plonų raukšlių šonais aiš-

kiai matosi koncentrinės linijos. Apskaldytose vietose galima pastebėti pilkos spalvos smulkiai kristalinę masę su stikliniu blizgėjimu, bet kai kur dar aiškiai matosi geležies sulfido kristaliukai. Šis gabalas ypač pasižymi blizgančiais metalo taškeliais. Kitoje vietoje matyti tamsesnė margai pilkos spalvos kristalinė medžiaga. Kietumas 5 — 6.

Nr. 9. Meteoritas savo forma — artimas trigonaliniai bipiramidei su 36 m/m briaunomis. 2-se vietose gerokai apskaldytas. Sveria 61,8 gr. Padengtas labai gražia juoda, stipriai blizgančia emalė. 3 bipiramidės šonai turi stambią skulptūrą, matyti, po suskilimo gavosi su aštriais kampais gabalas, kuris, krisdamas, stipriai apsilydė. Iš apdaužytų vietų matosi šviesiai pilka kristalinė medžiaga, kurios suskilimuose įvairiomis kryptimis eina juodos plonos gyslelės. Po emalės sluoksniu keliose vietose matosi geležingų lizdų rausvi taškai. Emalė turi juodos smalos spalvą. Kietumas — 5,5.

Nr. 10. Apskaldytos trigonalinės piramidės formos, turi pūslių pavidalo aplydytas įdaubas. Vienas galas — smailus, kitas — apvalus. Svoris 27,8 gr. Dydis 16×29×38 mm. Plonas emalės sluoksnis iš dalies atskilęs. Apskaldytame kampe matosi pilkai-juoda marga kristaliniai šlakuota medžiaga. Iš paviršiaus šlakuota medžiaga turi emalės infiltratą. Paliai emalę vienoje vietoje yra rudos medžiagos lizdas, tur būt, iš geležingos oksiduotos masės. Juodos masės kietumas — 6 pilkos — 5,5.

Nr. 11. Svoris 184 gramai. Kadangi buvo prof. Sleževičiaus išsiųstas į Münsterį prof. Busz'ui, tai aš neturėjau galimumo jį apibūdinti. Iš prof. Buszo laiško matyti, kad ir jo esama iš tos pačios medžiagos.

Apibūdinus visų 11 egzempliorių išorinę išvaizdą ir fizinių savumų skirtumus, padaryta nuodugnesnis fizinių bei cheminių savybių tyrimas. Kadangi visų gabalų daužyti buvo gaila, tai tyrimo darbams aš paėmiau vidutinio didumo gabalą Nr. 3, kuris buvo jau ir taip gerokai apskaldytas. Atpiovus ir nuskaldžius jo šoną, paėmiau keletą gabalėlių lyginamajam svoriui, persilaužimo koeficientui ir kietumui nustatyti. Vėliau, iš atskaldytų gabalėlių padarius vidutinę prabą — padariau pilną cheminį analizą. Skirtingų spalvų medžiagos lyginamojo svorio skirtumui išaiškinti buvo paimta kristali-

mai baltos, margai - pilkos ir šlakuotos pilkai - juodos po vieną gabaliuką prie temperatūros 18° C. Baltos l. sv. 2,88, pilkos l. sv. 2,95 ir šlakuotos l. sv. 3,18.

Iš atskirų vietų meteorito buvo išskaldyta stiklo pavidalo skaidri amorfinė medžiaga nustatyti persilaužymo koeficientui sulig Schröder Van der Kolk'o metodo. Nustatyta, kad koeficientas lygus 1,58.

Pasirodė, kad sąstatas atskeltos Nr. 3 meteorito dalies yra toks:

SiO_2	47,21%
Fe	1,56
FeO	13,74
Fe_2O_3	2,70
Al_2O_3	10,49
CaO	12,18
MgO	9,00
Na_2O	1,20
K_2O	0,86
S	0,51
C	0,43
Mn	pėdsak.
—	99,88%

Jungininių Ni, Ti, P, Sr, Ba, F, Cl. nerasta.

Paralėliai padarius dar 2-jų atskirų gabalų analizą man paaiškėjo, kad dėl nevienodumo mineraloginio meteorito sąstato ir didelio jo svyravimo įvairiose vietose ir dalyse aš gaunu nevienodus rezultatus. Ypač sunku buvo nustatyti Fe kiekis, nes yra labai svarbu atskirti FeO nuo Fe_2O_3. Be to, visai pripuolamas būna Fe metalo kiekis plėvelėse, kurios praeina per silikatinę masę. Taip pat ir geležis sulfidų pavidalu pasitaiko tik sporadiniai — atskirų kristaliukų pavidalu. Pastebėjau, kad sulfidų yra daugiau arti gilesnių dugno įdubimų ir jų buvimas aiškiai jaučiamas, nes tirpinant medžiagą HCl, išsiskiria smarkus H_2S kvapas.

Kadangi analizai nuskaldyto meteorito Nr. 3 šono davė labai nevienodą cheminį sąstatą, tai to priežasčiai išaiškinti šis gabalas buvo suskaldytas į gabalėlius.

Suspaudus gabalą tarp stiprių žnybtuvų nuo jo atskilo du didesniu gabalu (159 gr. ir 58 gr.), o likusioji dalis subirėjo į atskirus mažus aštriakampius gabalėlius.

Meteoritui skylant, buvo aiškiai jaučiamas gan stiprus sieros oksidų kvapas, kuris per keletą minučių išnyko.

Suskaldyta medžiaga parodė, kad mes turime labai nevienodą, brekčijos pavidalo struktūrą. Visą masę galima suskirstyti į 4 variantus.

I. Stikluota juoda emalė su ryškiu stikliniu blizgėjimu ne tik dengia meteorito paviršių, bet per plyšius yra pakliuvusi ir gilumon iki 7 mm. Vienoje vietoje ši emalė matosi net vidury plyšio. Šį apsireiškimą būtų galima paaiškinti — arba skystos stikluotos masės į plyšį pakliuvimu, arba atskirų jau apsilydžiusių gabalų susiklijavimu. Skylių - plyšių kryptis — labai charakteringa ir jų kampas yra lygus 55°.

II. Medžiaga — juodai pilka, panaši į šlaką arba bazaltinės lavos masę. Arčiau paviršiaus turi daug nuo dujų susidariusių pūslelių, o 1,5 cm. nuo paviršiaus giliau — plonų kapiliarinių kanalų, kurie eina net iki parubežinės medžiagos plyšio linijos. Blizgėjimas — stiklinis, bet vietomis per lūpą matyti ir metalinio blizgėjimo taškelių. Ištyrus šlifą, pasirodė, kad tų taškelių sąstatas yra arba metalinė geležis, arba geležies sulfidas. Šlifuoto paviršiaus spalva — juoda. Kietumas siekia net 6,5.

III. Trečio varianto medžiaga yra margai pilka, susidedanti iš juodos ir pilkos spalvos mažų kristaliukų, o tarp didesniųjų susibūrimų eina geležingos masės plonos gyslelės, kurių spalva keičiasi nuo geležies juodos iki ochros geltonos spalvos. Plėvelių vietose spalva įgauna charakteringą atspalvį, kuris panašus pav. į bornito arba kai kurių limonito variacijų spalvų margumą. Tačiau su tokiu blizgėjimu pastebėjau tik porą taškų.

Sulig petrografinės išvaizdos ši kristalinė masė turi anortito arba sanidino išvaizdą. Viename šone šios pilkos (tamsesnės) medžiagos eina pora paralelinių tamsesnės spalvos plyšių, kurių gilumoje paviršius sudaro apie 22°—24° kampą. Kietumas 5,5.

IV. Ketvirtos rūšies medžiaga yra baltai-pilka su tamsesnės spalvos gyslelėmis. Ji ryškiai atsirubežiuoja nuo tam-

sios šlakuotos masės, ir, matyti, turi aukštesnę lydymosi temperatūrą. Kadangi šio gabalo meteorito paviršius turi iš paviršiaus prilipusį juodos emalės sluoksnį, tik ant šitos baltos medžiagos, tai galima būtų manyti, kad ši medžiaga galėjo aplydyti visą paviršių, o meteoritui atšalant, patekus į sniegą nuo kitos skirtingos atšoko. Tačiau, vėliau padarius atskirą bandymą meteorito medžiagai aplydyti aukštos temperatūros elektros krosnyje, šis klausimas atrodė kitaip.

Ši šviesiai pilka su aiškiu stikliniu blizgėjimu kristalinė medžiaga, aiškiai matoma meteorito gabale Nr. 9. Ši trapi medžiaga turi gabalėlius stikluotos neva amorfinės medžiagos, ryškiai skiriasi nuo tamsesnės šlakuotos masės.

Makroskopiniai nustačius struktūros skirtumus, nutariau, kad elementariniais analizais ir cheminėmis reakcijomis mažai kas tegalima atsiekti, tat reikia griebtis optinių tyrimų poliarizuotos šviesos pagalba. Tačiau šlifų gamybos darbą trukdo didelis medžiagos kietumas ir jos šviesesnės variacijos trapumas. Tik paskyrus daug laiko šiam reikalui bus galima susilaukti tinkamų rezultatų.

Padarius pirmuosius primityvinius šlifus, paaiškėjo, kad šios medžiagos mineralinis sąstatas susideda iš rausvos ir tamsiai rudos spalvos augito. Be to, pastebėta dar lauko špatidų. Tarp jų vietomis stikluota masė, kurią prof. Busz apibūdino esant Maskelenytu. Ji optiniai yra izotropinė. Šlife aiškiai matomos plėvelės iš metalinės geležies ir kristaliukai iš geležies sulfido. Tik keletas įvairios medžiagos ir įvairių krypčių šlifų galės duoti galutiną apie mineralų tikrąją kombinaciją atsakymą, tačiau ir dabar jau galima sakyti, kad iš lauko špatidų, tur būt, yra anortitas.

Klausimui išaiškinti, ar nebus skirtingų spalvų ir struktūros susidarymo priežastis aukšta temperatūra, — mėginau į tai gauti atsakymą eksperimentų keliu.

Tamsiai pilkos šlakuotos, pilkos ir šviesios medžiagos gabaliukus įdėjus į elektros krosnį, pastebėjau, kad temperatūrai kylant nuo + 20° Ciki 850°C visi per 40 minučių pavyzdžiai neapsilydė, bet įgavo tamsesnę spalvą. Šviesiai pilkas pasidarė margai - rudas.

Toliau, po pertraukos, nuo + 425°C temperatūrai pakilus per 42 minutes iki 1050°C visi pavyzdžiai įgavo geležies juodą

matinę spalvą. Dar po trumpos pertraukos laike 1 valandos 25 minučių temperatūrai pakilus nuo + 600°C iki 1245°C, tamsiai pilkos stikluotos medžiagos gabalas pradėjo putoti ir davė visai analoginę meteoritų paviršių emalės medžiagą. Pilkas pavyzdys smarkiai susilydė ir prilipo prie šamoto plokštelės, o mažas šviesiai pilkas gabalas nors ir apsilydė, bet viduryje dar užlaikė kristalinę struktūrą. Iš šio bandymo rezultatų galima padaryti išvadą, kad tamsesnė medžiaga lydosi lengviau, nes, matyti, turi daugiau geležies, negu šviesesnė, kurios Ca ir Mg aliumosilikatai sunkiau apsilydo.

Dirbtinu būdu elektros krosnyje gautos emalės spalva ir blizgėjimas pilnai atatinka meteoritų emalei, ypač, pavyzdžio Nr. 4. Jo emalė turi visai tokią pat smalos juodos su bronziniu atspalviu išvaizdą.

Savo pastabą, kodėl baltesnė kristalinė medžiaga turi daugiau užsilikusios emalės, manau dabar paaiškinti tuo, kad prie rupesnio paviršiaus iš sunkiai lydomos medžiagos Ca—Mg eilės silikatų lengviau limpa emalė, kaip prie lygaus lengvai lydomo geležingo silikato paviršiaus.

Išstudijavęs esamą Kabinete literatūrą ir, būdamas užsienyje peržiūrėjęs kitų universitetų platesnę šiuo klausimu literatūrą, priėjau išvados, kad mūsų meteoritai reikėtų priskirti prie eukritų.

Shepard'as[1]) išskiria iš I litolitų grupės:

1. Eukritiniai: a) lauko špatinis,
   b) augitinis.

Rammelsberg'as[2]) juos išskiria iš III gr. silikatinių meteoritų:

5. Eukritai: Augitas ir anortitas.

Tschermak'as[3]) priskiria juos į V grupę ir pažymi, kad jų paviršius — blizgantis ir sąstato svarbesnės sudėtinės dalys: augitas, bronzitas ir Ca lauko špatai.

---

[1]) C. U. Shepard. New classification of meteorites, with an enumeration of meteoric species. Am. J. 1867 (2) XLIII, 22—28.

[2]) C. Rammelsberg. Die chemische Natur der Meteoriten. Abh. der königl. Akad. der Wis. zu Berlin. 1879. 3—4.

[3]) G. Tschermak. Beitrag zur Classification der Meteoriten. Sitzungsber. d. kk. Akademie d. Wis. z. Wien. 1883 LXXXVIII. I, 347—371 pusl.

Jų būna 2 variaciji:

Howardit'ai: — Augitas, bronzitas, plagioklazas.

Eukritai: — Augitas, anortitas, arba pastarojo vieton — Maskelinytas.

Brezina[1]) iš V skyriaus akmeninių meteoritų išskiria:

A. Achondritai (neturintieji Fe ir be atskirų chondrų) ir čia: Var. 8. — Eukritai — Augitas ir anortitas.

Meunier[2]) paskutinioje nomenklatūroje randame:

III skyrius. Akmeniniai meteoritai:

B. Fe neturintieji. 56 variantas — Eukritai: — Anortitas, augitas.

Weinschenk'o[3]) sistematizacija turi skyrių.

A. Fe neturintieji — meteoritai akmeniniai.

I. Anormaliniai: a) Eukritas (Shergottit'as) — lauko špatų turtingas.

Iš čia matome, kad mūsų meteoritų egzemplioriai priklauso prie retesnių variacijų ir todel jų apibūdinimas yra sunkesnis.

Padarius papildomus šlifų tyrimus ir gavus literatūrą, manau, kad bus galima tarti galutiną žodį apie mūsų meteoritus ir nustatyti iš esamų klasifikacijų jų tikrąjį vardą.

Prof. Busz, gavęs nuo prof. Sleževičiaus vieną meteorito egzemplioriu, buvo pradėjęs net abejoti dėl gauto pavyzdžio meteorinės kilmės ir tik, ištyręs šlifus, pripažino, kad tai yra labai įdomus pavyzdys, kurį sulig panašumo linkęs yra palyginti su meteoru nukritusiu 1865 m. - 25 - VIII Ostindijoje Shergotty paliai Behar'ą.

Darant sąstatų analogiją, lyginant charakteringos išvaizdos aprašymus ir cheminį bei mineralogini sąstatą, aš ma-

---

[1]) A. Brezina. Ueber neuen Gruppeu im System der Meteoriten. Tagbl. der Wersaml. deutscher Naturforscher u. Ärzte. Wien 1894, 443 p.

. The arrangement of collections of meteorites. Proceedings of the American Philosophical Sosiety held of Philadelphia. 1904 XLIII. Nr. 176, 232–247 pusl.

[2]) St. Meunier. Guide dans la collection de météorites avec le cataloque des chutes représentées au Muséum. Paris. 1898.

[3]) E. Weinschnek. Zur Classification der Meteoriten. Sitzungsber. d. k. bayrischen Akademie d. Wissenschaften z. München. Mat.-naturw. Cl. I. Abteil. 1889, 137—145 pusl.

nau, kad mūsų meteorito egzemplioriai turi dar panašumo su meteoru Angra dos Reis. Pastarasis buvo lengvai lydomas ir nepaprastai turtingas Ca-jo augitu.

E. Cohen[1]) sako, kad — „dauguma achondritų turi stiprų blizgėjimą, panašų į išdžiūvusio pokosto paviršių su labai juoda spalva". Šis tipingas ženklas ryškiai juos išskiria iš visų kitų variacijų, o mūsų pavyzdžiai ypač turi gražią juodos smalos spalvą. Reichenbach'as[2]) pavadino jų paviršių net „stiklu blizgantis".

Šitie meteoritai, kaip sako tas pats Cohen'as, turi būti turtingi anortitu arba maskelinitu ir lengvai lydomi.

Piešinių ir fotografijų sąrašas.

1. Meteorui krintant liepsnos ir švarių formų gabalų pasigaminimo schema (pagal Hanuš'o).
2. Schema (pagal Hanuš'o) kritimo ir įvairios formos akmenų pasigaminimo ryšyje su temperatūra.
3. Visų rastų meteoro gabalų išorinė išvaizda (be Nr. 11).
4. Didžiausio ekzemplioriaus Nr. 1 naturalaus dydžio fotografija.
5. Tas pats iš kito šono.
6. Tas pats iš 3-čio šono.
7. Meteorinis akmuo iš Nr. 5 iš dviejė šonų, naturalaus dydžio.
8. Meteorinio akmens Nr. 3 vidujinė struktūra.
9. Padvarninkų kaimo meteorito kritimo vieta — pieva ir ariamas laukas.
10. Tas pats — miške.

Kaunas, 1930 m. kovo mėn.

---

[1]) Cohen, Meteoritenkunde. Heft II. Stutgartt 1903. 101 pusl.

[2]) C. v. Reichenbach. Ueber die Rinde des Meteorsteine. Annalen. d. Phisyk u. Ch. 1858. CIV, 473—482.

Kurze Zusammenfassung der Erforschung des in Litauen niederfegefallenen Meteorits.

Von den im Jahre 1929 niedergefallenen Meteoriten sind elf Stück gefunden worden, die für die Meteoriten dem äusseren Aussehen nach sehr charakteristisch sind. Alle von ihnen sind mit tiefschwarzer glasiger Schmelzrinde überzogen. Die oberflächliche Struktur zeigt zartes Netzwerk von kleinen verästelten Rinnen und Rillen der überschmolzenen Kruste. Man sieht klare Spuren des Fliessens dieser geschmolzenen schwarzen Rindenschicht. Daneben tretten auch die für die Meteoriten charakteristische Grübchen auf.

Das gesamte Gewicht aller 11 Exemplaren beträgt 3858 gr. und das eines jeden einzelnen: Nr. 1 — 2128 gr., Nr. 2 — 589 gr., Nr. 3 — 292 gr., Nr. 4 — 128,6 gr., Nr. 5 — 104 gr., Nr. 6 — 98 gr., Nr. 7 — 87,3 gr., Nr. 8 — 87,5 gr., Nr. 9 — 61,8 gr., Nr. 10 — 27,8 gr., Nr. 11 — 184 gr.

Die makroskopische Untersuchung des Stückes Nr. 3, welches zu diesem Zwecke gesprengt wurde, zeigt den breccienähnlichen Stoff von verschiedener Farbe und Zusammensetzung.

1. Das glassig schwarz glänzende Email bedeckt nicht nur die Oberfläche jedes einzelnen Stückes, sondern sie dringt adernartig in das Innere der Meteorite ein.

2. Die dunkelgraue Masse ist der basaltischen Lava ähnlich, die gegen die Oberfläche steigende Porosität aufweist. An der Bruchflache sieht man durch die Lupe einige Punkte von metallischem Glanz. Spez. Gew. 3,18, Härte — 6,5.

3. Buntgraue Teile des Stoffes bestehen aus dunkler Masse und lichteren kleinen Kristallen. Diese Masse zeigt auch einige eisenhaltige Adern, die dunkelbräunlich aussehen. Ausserlich ist dieser Stof dem Anortit oder Sanidinähnlich. Glanz glasig. Spec. Gew. 2,95, H. 5,5.

4. Lichtgraue Masse mit dunklen Adern. Sie besitzt ganz verschiedenes Aussehen von den übrigen schlackigen Masse und ist wahrscheinlich von höherem Schmelzpunkt. Glanz glasig. Spez. Gew. 2,88, H. 5—4.

An manchen Stellen der Meteorit bruchfläche treten kleine punktähnliche glasige optisch isotropische Teile — Maskelinyt — auf, deren Brechungskoefizient gleich 1, 58 ist.

Durch die chemische Analyse wurde festgestellt, dass der petrographischen Zusammensetzung einzelner Stücke auch die grossen Schwankungen der chemischen Zusammensetzung entsprechen. Besonders auffallend ist die Schwankung des Eisens, das in der Formel Fe_2O_3, FeO und Fe vorkommt. Die Analysenergebnisse Siehe S. 161.

Es muss noch die Erforschung mit Hilfe der Dünnschliffen durchgeführt werden. Bei der Veröffentlichung dieser Arbeit ist es noch nicht gelungen entsprechende Zahl von Dünnschliffen durchzuführen um etwas Bestimmtes festzustellen, zu welcher Abart er gezählt werden soll.

Die ersten Dünnschliffen zeigten, dass dieser Meteorit die Feldspatide besitzt aus denen Anortit hervortritt. Ausserdem kommt hier, als dunkle Gemengteile der Augit vor. Dazu enthält die meteorische Masse auch Eisen in der Form von Magnetit und Sulfid. Unter den kleinen Kristallen der Feldspatiden befinden sich die amorphischen Teile von Maskelinyt.

Schon die ersten Dünnuschliffe lassen uns vermuten, dass diese in Andronischkis gefundene Meteoritsabart zu der Gruppe von Eukriten gerechnet werden muss. Die mineralische Zusammensenzung gibt uns den Grund ihn mit dem Meteorit aus Shergotty bei Behar in Ostindien zu vergleichen, welcher im Jahre 1865 VIII.25 niedergefallen ist. Derselben Meinung ist auch Professor Dr. K. Busz in Münster Westf. dem ein Stück zugeschickt wurde.

Aus den Beschreibungen bin ich geneigt, diesen Meteorit seinem äusseren Aussehen nach mit dem Meteorit Angra dos Reis zu vergleichen. Der letztgenannte war leicht schmelzbar und besass reichlich Ca-haltgen Augit.

Um aufzuklären, ob die hohe Temperatur beim Niederfallen des Meteorits nicht auf seine innere Struktur eingewirkt hat, habe ich ihn mit Hilfe des elektrisch. Offens zu schmelzen versucht. Zu dem Versuche wurde dunkel graue schlackkige, graue und lichtgraue Masse genommen.

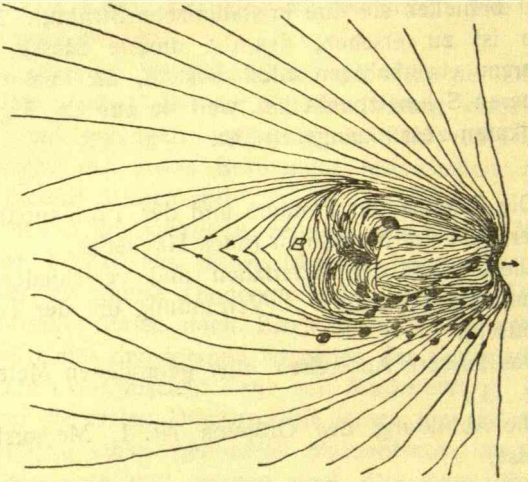
In der Temperatur von + 20° bis 850° ist binnen 40 Minuten keine von ihnen geschmolzen, nur erhielten sie eine dunklere Farbe. Lichtgraue Teile sind bunt braun geworden.

Nachdem eine Temperatur von 20° bis 850° einige Zeit gewirkt hatte, wurde die Erhitzung für kurze Zeit unterbrochen. Darauf wurde erhitzt von 600° bis 1245° Wärend in 1 Stunde

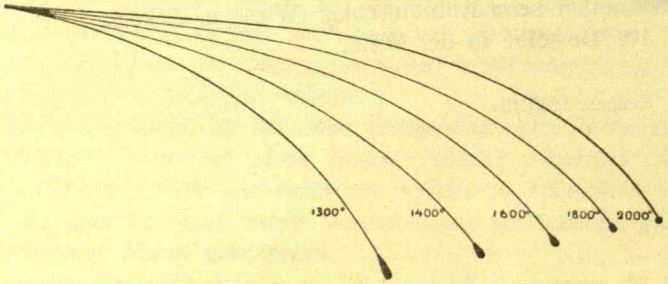
25 Minuten hat die dunkle schlackige Masse zu schäumen angefangen und gab ganz analogisch dunkel glänzende Rinde, welche bei Meteoriten vorkommt. Die graue Masse wurde stark geschmolzen, lichtgraue Teile dagegen an der Oberfläche, in der Mitte aber behielten sie ihre kristallinische Struktur. Aus diesen Versuchen ist zu ersehen, das die dunkle Masse aus leicht schmelzbarem eisenhaltigen Stoff besteht, die lichtere dagegen einen höheren Schmelzpunkt hat, weil sie aus Ca, Mg und Alluminiumsilikaten zusammengesetzt ist.

1. Die Schema der Flamme und der Formenenentstehung beim Niderfallen der Meteoriten (nach Hanusch).
2. Die Schema der Niderfallen und verschiedener Formenentstehung der Meteoriten in Verbindung mit der Temperatur. (nach Hanusch).
3. Das äussere Aussechen aller gefundenen Meteorstücken (auszer Nr. 11).
4. Die Abbildung des Grössten Nr. 1. Meteorstückes in natür. Grösse.
5. Dsgl. von der Anderen Seite.
6. Dsgl. von der dritten Seite gesehen.
7. Die Abbildungen des Meteoritsstückes Nr. 4 von beiden Seiten; natürl. Grösse.
8. Die innere Struktur des Meteoritsstückes Nr. 3.
9. Der Fundort der niedergefallenen Meteoriten in Dorf Padvarninkai beim Andronischkis (Wiese u. Acker).
10. Derselbe in der Wald.

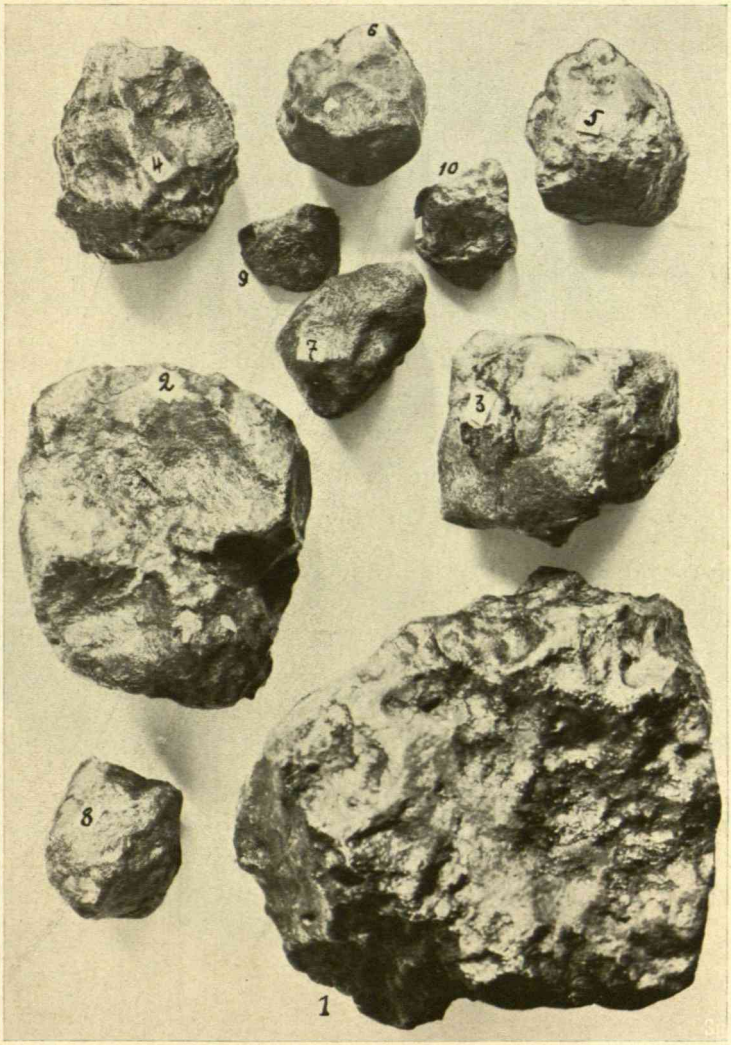
Kaunas, 1930.III.



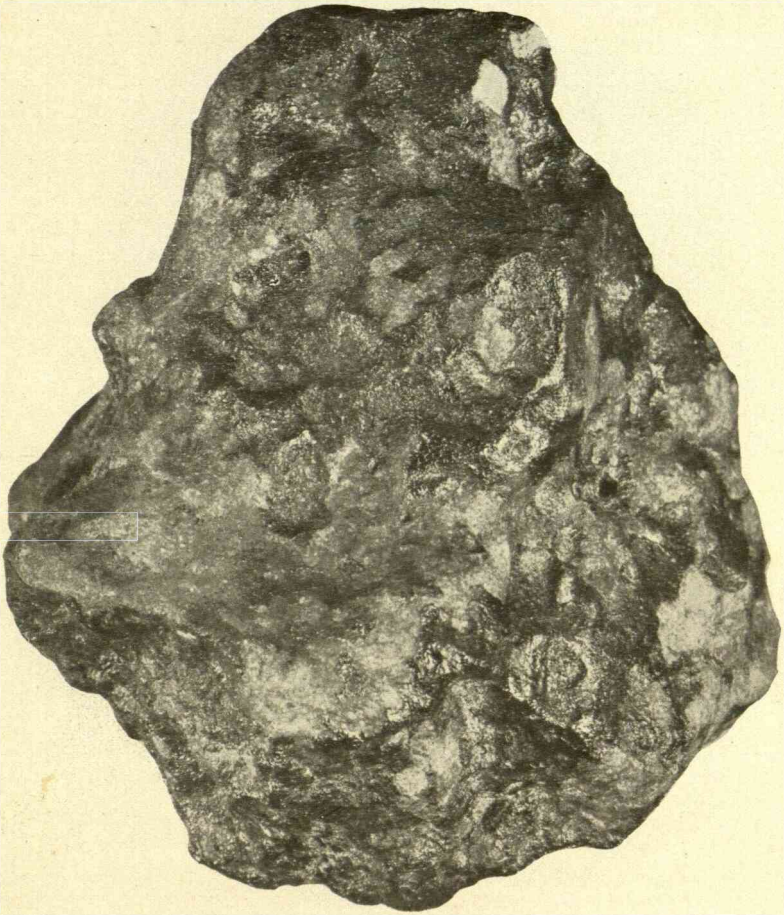
Brěž. Nr. 1.



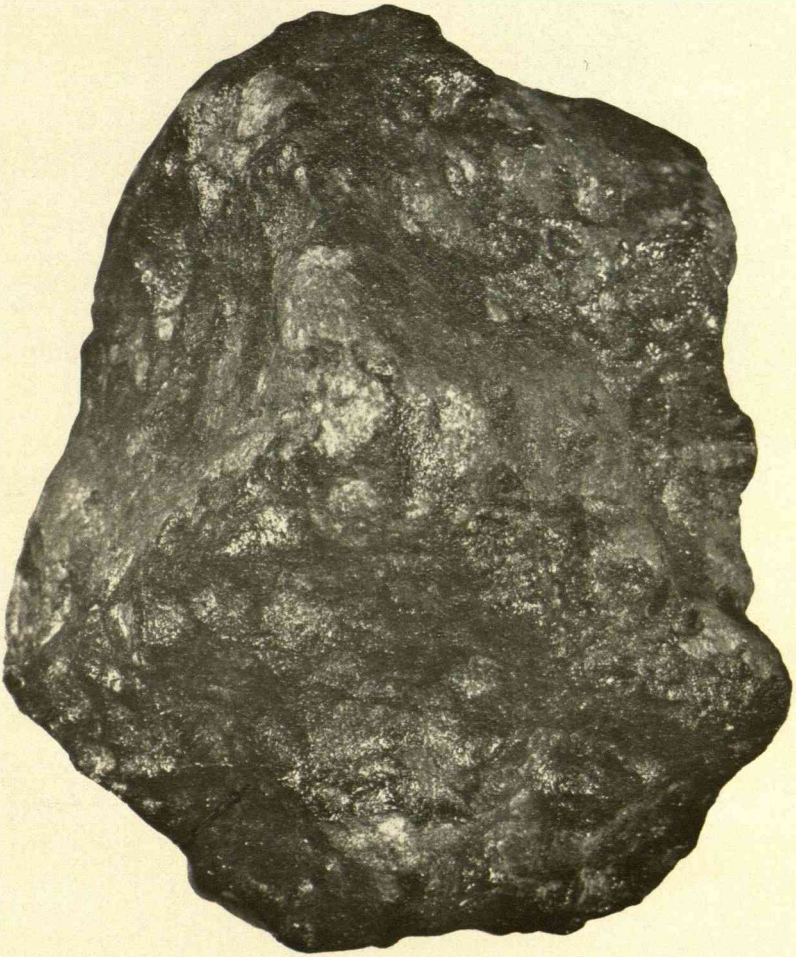
Brěž. Nr. 2.



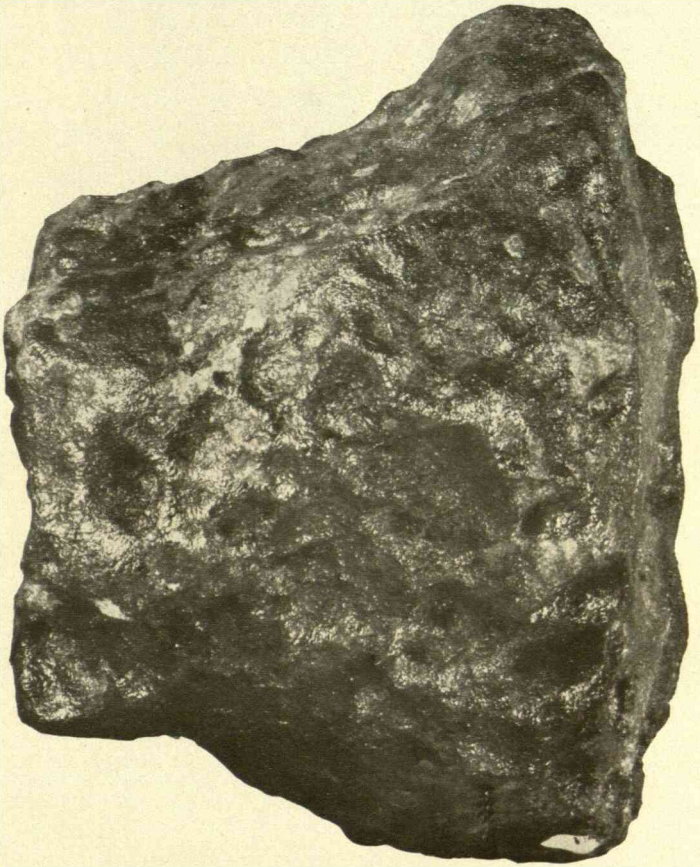
Fot. Nr. 3.



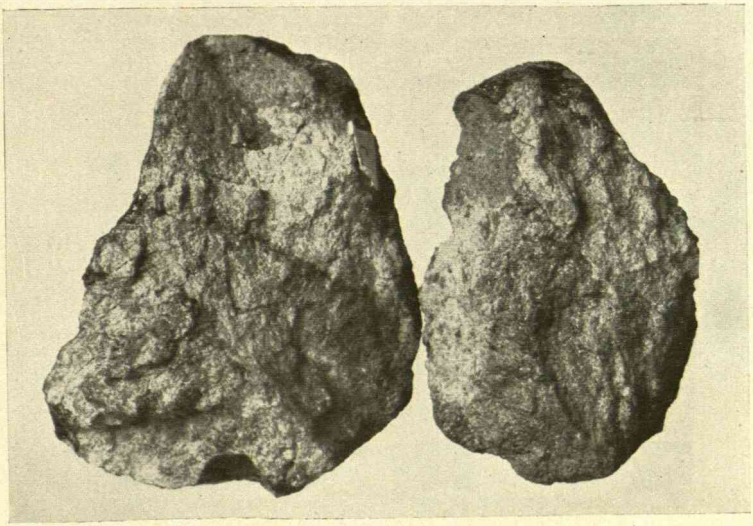
Fot. Nr. 4.



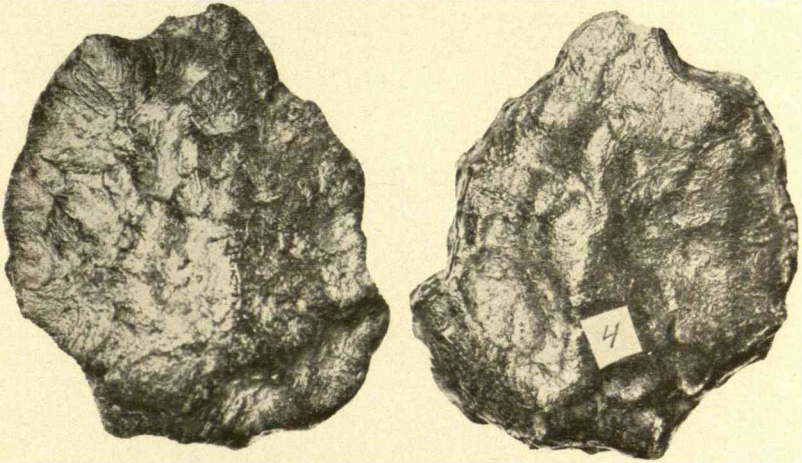
Fot. Nr. 5.



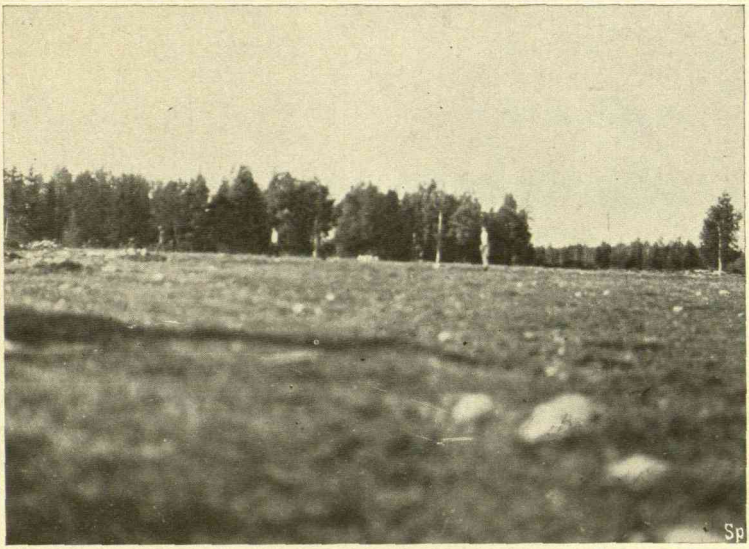
Fot. Nr. 6.



Fot. Nr. 7.



Fot. Nr. 8.



Fot. Nr. 9.

Fot. Nr. 10.

Prof. Z. Žemaitis.

Matematikos istoriografija ir Moritz Cantor.

Pratarmė.

1929 metų rugpiūčio mėn. 23 d. sukako 100 metų nuo tos dienos, kai gimė įžymiausias matematikos istorikas Moritz Cantor, o 1930 m. balandžio mėn. 9 d. suėjo 10 metų nuo jo mirties. Ta proga dera paminėti to didelio ir darbštaus mokslininko gyvenimas ir darbai.

Prisideda ir da viena priežastis, verčianti mus, kiek mūsų darbo sąlygos leidžia, plačiau apibūdinti M. Cantor'o darbuotę. Jis savo gimtajam krašte po pirmųjų entuziastiškų pagyrimų ir išaukštinimų vėliau buvo gerokai užmirštas ir net mirties proga nebuvo tinkamai paminėtas: specialė spauda, kurioje jis visą savo ilgą gyvenimą aktingai dalyvavo, kiek mums žinoma, teatsiliepė trumpa chronikine žinute apie mokslininko mirtį ir nedavė pilnesnio jo asmens ir darbuotės vaizdo. Viena to priežasčių galėjo būti ta, kad jis mirė pokarinio Vokietijos sąmišio ir visuotinės depresijos metu, kai specialė moksliškoji spauda gyveno visokiais atžvilgiais sunkius metus. Bet svarbiausia užmiršimo priežastis, mūsų manymu, glūdi ne tiek jo darbo išdavose, kiek to darbo sąlygose, kuriose jam teko vykdyti didelį mokslo žygį.

Visa tai verčia mus plačiau apžvelgti mokslo dirvą ir darbo sąlygas, kuriose dirbo Mortiz Cantor, ir padaryti pastangų nušviesti jo vaidmeniui matematikos istoriografijoje.

I. Matematikos istoriografija.

Ilgus praeities amžius istorijos vardu paprastai vadinta platesni arba siauresni politinių įvykių aprašymai, kuriuose žymų vaidmenį vaidino karalių, politikų ir karvedžių biografijos. Paly-

ginti nesenai imta domėtis realėmis tautų ir valstybių gyvenimo sąlygomis, nes pastebėta, jog jos yra ne tik dirva, kurioje vyksta įvairūs istoriniai procesai, bet dažniausia esti jų priežastys, gimdančios ir reikiamus veikėjus. Dar vėliau susidomėta dvasinių mokslų (filosofijos, teologijos) ryšiu su socialio ir valstybinio gyvenimo fenomenais, tad į tų mokslų vaidmenį ir pobūdį imta kreipti domės, kalbant apie tautų ir valstybių praeitį. Kiti mokslai paprastai būdavo paliečiami bendroje žmonijos istorijoje tik pakeliui, veikiančių žmonijos grupių charakteristikai ir bendram gyvenimo vaizdui papildyti. Net dailiajam menui istorija mėgdavo daugiau domės ir vietos skirti negu grynajam mokslui.

Tuo tarpu, rodos, dalykai turėtų būti traktuojami visai kitaip. Kad mokslai, ypač vadinamieji tikslieji (gal geriau būtų juos vadinti materialiais) veikia socialį gyvenimą, yra neabejojamas dalykas. Jų progresas arba regresas, teigiamai arba neigiamai veikdamas gyvenimą, yra ir, be abejojimo, būdavo didžių politinių įvykių priežastis. Gerai tą dalyką charakterizuoja R o s e n b e r g e r įdomiame veikale, kurį nekartą gausime cituoti*). Jis nurodo, kad svarbiausioji žmonijos kultūros reiškėja Europa yra bendrumo ir priešingumo ryšiais susirišusi su visomis žemės rutulio dalimis ir kad tie ryšiai, pobūdžio ir stiprumo atžvilgiu, beveik išimtinai remiasi jos tiksliaisiais mokslais, jųjų technika ir iš jos išaugusia industrija. Taikingieji politiniai santykiai ir kariškosios komplikacijos vertinama kaip tik daugiausia tuo, kokių jos gali turėti pasėkų tos arba kitos valstybės pramonei ir prekybai. Mūsų laikais tautų pasiruošimas kasdienei buities kovai reiškiasi technikos ir mokslo srityse; dar griežčiau tą galima pasakyti apie jų karišką pasiruošimą. Todel dabartiniu metu yra neįmanoma teisingai įvertinti politinius procesus neatsižvelgus mokslo ir technikos pažangos. Kiekvienas rimtas istorikas privalo dabar gerai sekti mokslų pažangą ir gerai įvertinti jų įtaką ne tik materialiam, bet ir dvasiniam tautų ir valstybių gyvenimui.

Tai verčia dabar istoriją kreipti ypatingos domės į žmonijos kultūros istoriją, kaip priemonę ir politiniams praeities procesams bei įvykiams tinkamai suprasti. Kultūros istorijoje pradeda tinka-

*) F e r d. R o s e n b e r g e r—Die Geschichte der exakten Wissenschaften und der Nutzen ihres Studiums — „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik", IX tomas, skirtas M. Cantor'o 70-metiniam jubiliejui paminėti; toliaus šis tomas bus trumpai vadinamas „Festschrift"; 1899, pusl. 359—381.

mą vietą užimti mokslų istorija. Vis dėlto tenka konstatuoti faktas, jog daugiausia svarbos dedama vadinamiesiems humanitariniams (dvasiniams) mokslams. Tiksliesiems arba materialiams mokslams vis dar nerandama tinkamos vietos istorijos rankvedžiuose, kuriuose kartais daugiau kalbama apie meną ir menininkus, nei kaip apie didžiąsias mokslų idejas ir išradimus, kurie ne kartą apvertė viršum kojomis visą žmonijos psichiką ir materialį gyvenimą. Todel, kaip pastebi Rosenberger*), tikslių̨jų̨ mokslų pareiga atžvilgiu jų pačių yra kiek galima plačiau nušviesti jų reikšmę visuotinei žmonijos kultūrai ir tuo sužadinti didesnį susidomėjimą jais. Tuo atžvilgiu tikslieji mokslai, būdami sunkiau suprantami plačiajai visuomenei, atsiduria blogesnėje padėty, negu kiti mokslai, ir tas ne tik trukdo jiems plačiau pasiskleisti žmonėse, bet varžo visą jų augimą. Ir dabar net šviesuolių tarpe galima rasti žmonių, labai mažai nusimanančių apie tiksliuosius mokslus ir mažai juos vertinančių. Padėtis galėtų žymiai pagerėti, jei tokiems inteligentams būtų patiekta tinkamai parašytoji tikslių̨jų̨ mokslų istorija, kuri padėtų jiems pamatyti ir įvertinti organiškus ryšius, nuo senų laikų rišusius, iš esmės ir dabar teberišančius tiksliuosius mokslus su humanitariniais — iš vienos pusės, ir su žmonijos kultūros augimu — iš antros pusės.

Tikslių̨jų̨ mokslų istorijoje istoriografai, vėl gi, domesį dažniausiai koncentruoja eksperimentiniuose moksluose. Priežastis yra ta, kad paskutiniais šimtmečiais tie mokslai yra tiek griežtai pažengę pirmyn, jog naujaisiais laikais mokslų progresas ne kartą imta identifikuoti su eksperimentinių mokslų pažanga, o gabūs eksperimentatoriai dažnai temdo istorijoje genialius idėjų kūrėjus, kurie savo giliu protu darė eksperimentų sintezį ir kūrė idėjas, gaivinusias ir žadinusias pačius eksperimentinius mokslus. Matematikos istorija galėtų paminėti nemaža dvasios galiūnų, suvaidinusių tokį vaidmenį tikslių̨jų̨ mokslų progrese, bet neradusių prideramo įvertinimo jų istorijoje. Tokių klaidų atsiranda dėl to, kad matematikos istorija retai esti laikoma organiška jungiamąja kitų mokslų istorijos dalimi**). Mūsų giliu įsitikinimu, eksperimetinių (materialių) mokslų istoriografai, geriau įsigilinę ma-

*) Ferd. Rosenberger — op. cit., 369 pusl.

**) B. Branford — Betrachtungen ueber die mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität — (deutsch von R. Schimmack u. H. Weinreich). Leipzig, 1913, 403 pusl.

tematikos idėjų ir metodų brendimo istorijon, lengvai suprastų, jog daugelis fizikos, mechanikos ir astronomijos išradimų, kurie paveikė ne tik artimuosius joms gamtos mokslus, bet ir dvasinius (pav. filosofiją), ir kurie kartais gali rodytis lyg kad savaime būtų ištikę, buvo suprantama ir kartais būtina įvykusios matematikoje pažangos konsekvencija.

Bet parašyti bet kurio eksperimentinio mokslo istorija, organiškai sujungta su matematikos ir kitų tiksliųjų mokslų istorija, yra be galo sunkus darbas, beveik nepakeliamas vienam žmogui. Tenka tokiam istorikui ne tik susipažinti su daugybe šaltinių - veikalų ir juos kritiškai įvertinti, tenka susekti ir išnarplinti siūlus, jungusius to arba kito tyrinėtojo mintis su jo pirmtakūnų ir laikininkų idėjomis, vadinasi reikia susekti idėjų atsiradimą, augimą ir susilydymą su kitomis idėjomis.

Jei tiek nelengva paruošti tinkama atskiro mokslo istorija, tai nepalyginti sunkesnis yra uždavinys parašyti bendra tiksliųjų mokslų istoriją, ir išaiškinti jų ryšys su visa žmonijos dvasinės pažangos istorija. Atrodo, kad yra visai neįmanomas dalykas vienam žmogui tokio darbo imtis. Vis dėlto, netrūksta rimtų ir pusėtinai vykusių pastangų, kurios buvo darytos ta linkme praeity. Paminėsime kad ir tokius žinomus vardus: W. Whewell*), Max Marie**), Paul Tannery***).

Paminėtuose tiksliųjų mokslų istorijos veikaluose yra nemaža žinių ir iš matematikos istorijos. Tas yra visai suprantama ir to dalyko būtinumą aiškiai pabrėžė M. Cantor referate: „*Sur l' Historiographie des mathématiques*, skaitytame II tarptautiniame matematikų kongrese (Paryžiuje 1901 m.), sakydamas, jog „moderninės matematikos istorija turi būti įterpta į įvairias knygas, skirtas specialių mokslo šakų istorijoms****). Tačiau matematikos istorija, kuri būtų išsklaidyta tik kitų arba ir visų mokslo šakų istorijose, būtų užstelbiama kitų mokslų ir neduotų aiškaus vaizdo,

---

*) W. Whewell — History of the inductive sciences, 3 vol, London, 1837—38.

**) Max. Marie — Histoire des sciences mathématiques et physiques, 12 vol., Paris, 1883—1888.

***) Paul Tannery — Sciences exactes... plati tiksliųjų mokslų istorija sudaranti 8 tomus (įvairiais pavadinimais), Paris, 1876—1903.

****) Cituota iš W. Ahrens — Scherz uud Ernst in der Mathematik Leipzig, 1903, pusl. 261.

kaip ir kuriais etapais vystėsi pati matematika. Todėl matematikai turėjo susirūpinti savo mokslo istoriografija ir jau nuo senų laikų netrūko pastangų rašyti matematikos istorijai. Pamėginsime trumpai apžvelgti tas pastangas, ypač kad to ir reikia, jei norime parodyti tikrą vietą, kurią turi užimti matematikos istoriografijoje M. Cantor.

Senovės graikai, tikrieji matematikos, kaip mokslo, kūrėjai, pirmus žingsnius joje žengdami, sekė anksčiau ir labiau išsicivilizavusių tautų (aigiptiečių, babyloniečių, gal net indų, chinų) pavyzdžiais. Tik toji rytietiškoji matematika, kaip ir kiti senovės rytiečių mokslai, turėjo savotiško pobūdžio ir savotiškais tikslais kurta. Rytuose, kaip teisingai pastebi H. Lorentz*), „mokslai sudarė privilegijuotą kunigų kastos nuosavybę ir buvo naudojami jų tikybos ir jų pačių autoritetui palaikyti. Moksliško pobūdžio žinios ir praktiniai nurodymai reikšta tikybinių dogmų forma, be kokių įrodymų, be laisvės jas nagrinėti, vadinasi, ir be sąlygų joms augti". Be to, žinoma, jog tokių žinių atsiradimas dažnai buvo rišamas net su dievaičių įsikišimu, tad savaime aišku, kad senovės rytų tautos negalėjo parodyti graikams matematikos istorijos pavyzdžių. Tik patekusios laisvojon Graikijon primityvios sustingusios rytų moksliškosios žinios ėmė organizuotis ir tapo tikraisiais mokslais. Čia atsirado ir reikalo rinkti žinias apie tų mokslų, jų tarpe ir matematikos, praeitį ir padaryta pirmos pastangos rašyti jos istoriją.

Graikų matematikai ir filosofai: Eudemos, Eudoxos, Jamblichos, Proklos ir kai kurie kiti, kiek žinome, pirmieji rinko ir surašinėjo matematikos istorijos žinias. Tačiau daugumas tų raštų yra žuvę. Iš vienos antros išlikusios jų nuotrupos, fragmento, matyti, kad tai nebuvo tikroji matematikos istorija, bet daugiau matematikų gyvenimo aprašymai. Tiesa, senovėje mokslai nebuvo taip, kaip dabar išaugę, išsišakoję ir virtę bendru žmonijos turtu. Jų atsiradimas, augimas ir pobūdis labai glaudžiai siejosi su jų kūrėjų gyvenimu ir net būdo savybėmis. Vis dėlto ir tų, kad ir sporadiškai pasirodžiusių mokslininkų veikime turėjo būti tam tikro nuosakumo, kurį reikėjo matematikos istorijai susekti. Tokios istorijos klasikinė senovė nėra mums palikusi.

---

*) Г. Лоренцъ — Элементы высшей математики, I т., Москва, 1903, pusl. 91.

Neparašė matematikos istorijos nė arabų matematikai, šiaip surankioję, sukaupę ir išsaugoję žmonijai daug graikų matematikos veikalų ir žinių apie juos. Nepaliko jos mums ir viduriniai amžiai.

Naujiesiems amžiams prasidėjus kiek rimčiau susidomėta matematikos istorija. Paminėtini iš XVI — XVIII šimtmečių šie žymesnieji tos srities rašytojai ir veikalai: Petrus Ramus, (franc. Pierre de la Ramée, 1515 — 1572), parašęs veikalą: *Scholae mathematicae* (Paris, 1569); Giuseppe Biancani (latinizuotai — Blancanus, mirė 1624 m.) — *De natura mathematicarum sciantiarum tractatio atque clarorum mathematicorum chronologia* — Bononia, 1615; Gerhard Johann Voss (Vossius, — 1577 — 1649) — *De universa matheseos natura et constitutione liber, cui subjungitur chronologia mathematicorum* Amstelod 1650; Claude François Dechales (1621 — 1678) — *Cursus seu mundus mathematicus, Pars I: Tractatus proemialis de progressu matheseos et illustribus mathematicis,* — Lugduni, 1690; Johann Christoph Heilbronner (1706 — 1747) — *Versuch einer mathematischen Historie,* Frankfurt, 1739 ir *Historia Matheseos universae a mundo condito ad saeculum post Chr. Nat. XVI.* Lipsiae, 1741 ir dar vienas, antras tos srities rašytojas.

Berods rimčiausias čia suminėtų rašytojų buvo Petrus Ramus, gerai panaudojęs turėtą negausingą medžiagą, siekęs ir originalių graikiškų šaltinių*). Kiti paminėtieji rašytojai, kad gal ir palaikė susidomėjimą matematikos istorija, labai nekritiškai naudojo bet kokias pasitaikiusias žinias, tad prirašė apsčiai nesąmonių.

Tais laikais atsirado ir pirmieji bendrai moksliški ir matematiški žurnalai. Jie nebuvo specialiai skirti istorinei matematikos medžiagai rinkti, turėjo tikslo mokslų išradimus skelbti ir aptarti. Tačiau juose pasitaikydavo žinių ir iš matematikos istorijos, o jie patys vėliau pasidarė svarbiausiais šaltiniais anos gadynės matematikos istorijai tirti. Paryžiuje 1665 m. išėjo *„Journal des Savants"*, jo pavyzdžiu Romoje 1668 — 1681 m. ėjo *„Giornale de*

*) Moritz Cantor — Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik II Bd., 3 Aufl., Leipzig, 1913, pusl. 546. Toliau šis Cantor'o veikalas bus cituojamas sutrumpintai: M. Cantor, I, II, III, IV ir bus remiamasi šiomis laidomis: I t., 4 laida, 1922, 941 pusl.; II t. — 3 laida 1913, 943 pusl.; III t. — 2 laida, 1901, 923 pusl. ir IV t. — 1 l. 1909 m. 1113 pusl.

Letterati"; panašūs žurnalai buvo leidžiami ir kai kuriuose kituose Italijos miestuose (Venecijoje, Parmoje, Modenoje). Tuose žurnaluose dėjo savo straipsnius ir skelbė išradimus žymiausieji anų laikų matematikai.*)

Pirmas parašęs jau moderniškesnę plačią matematikos istoriją buvo francūzas Jean Ėtienne Montucla (1725 — 1790). Jis 1758 m. išspaudino 2 tomų veikalą pavadinimu: *Histoire de Mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depui leur origines j'usqu' à nos jours; ou l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre les mathématiciens et les principaux traits de la vie des plus célèbres* (2 vol., Paris, 1758). Pirmas tomas apėmė matematikos istoriją nuo seniausių laikų iki XVII šimtm. pradžios; antrame dėstoma XVII š. matematika. Montucla ruošė spaudai ir tolesnę istoriją iki savo laikų, tačiau nesuskubo pats baigti to darbo. Medžiagą sutvarkė ir išleido 1799 — 1802 m. kaip III ir IV tomus, kartu su I ir II tomų II laida — Jérôme de la Lande.

Montucla apsčiai surinko istorinės medžiagos, tačiau ji dar negalėjo būti kaip reikiant kritiškai įvertinta, nes nebuvo kas tirinėtų šaltinius ir trūko daugelio dabar jau žinomų šaltinių. Vienas žmogus, kad ir toks nepaprastai darbštus, kaip kad buvo Montucla, vis tiek nebūtų pajėgęs jų daugiau surankioti, nebūtų nuodugniai mokėjęs tiek kalbų, kiek jų reikia visiems tiems šaltiniams skaityti ir ištirti. Pagaliau, Montucla per daug plataus darbo ėmėsi: parašyti istoriją ne tik grynosios, bet ir vadinamos pritaikomosios matematikos, kurion įskaitė: mechaniką, astronomiją, optiką, jūreivybės mokslą, geografiją, chronologiją, gnomoniką. Aišku, kad jis vienas to visa tinkamai atlikti negalėjo ir veikalo vertybė turėjo nuo to nukentėti. Vis dėlto Montucla darbas sudarė pirmąjį didelį įdėlį matematikos istorijon ir tiek ją visą pastūmėjo pirmyn, kad M. Cantor net pastebėjo, jog „jo (Montucla) papėdininkas turėtų jaustis laimingas, jei jam pavyktų pažengti pirmyn tik pusę to, kiek yra pažengęs Montucla palyginti su Voss'u.**)

---

*) Gino Loria — Il „Giornale de Letterati d'Italia" di Venezia e la „Raccolta Calogerà" come fonti per la storia delle matematiche nel secolo XVIII", — Festschrift, pusl. 243—252.

**) Cantor, III, pusl. 502.

Tie papėdininkai atėjo labai negreitai. Šimtas su viršum metų praėjo nuo Montucla veikalo I-os laidos pasirodymo, o niekas nepajėgė ne tik pažengti pirmyn, palyginti su Montucla, bet net pavyti jo, nežiūrint to, kad XIX šimtm. bendrai pastebimas didelis susidomėjimas mokslų istorija. Paminėtini po Montucla rašytojai: Abraham Gotthelf Kästner, Charles Bossut, H. Suter, tačiau jie mažą dalį tepadarė to, ką yra atlikęs Montucla.

Taip maža buvo nuveikta matematikos istorijoje iki to momento, kada stojo darban žymiausias matematikos istoriografas Moritz Cantor.

Kodėl taip mažai domėtasi matematikos istorija ir tada, kada jau kitų mokslų istorija buvo labiau susirūpinta? Pirmoji priežastis berods buvo ta, kad žmonės, studijavę senovės raštus, buvo beveik išimtinai kalbininkai ir istorikai, mažai tenusimanę matematikos dalykuose, jais nesidomėję ir negalėję sudominti matematikos žinovų jos praeitimi. Antroji priežastis, — matematikų tarpe maža buvo žmonių, linkusių ir pajėgusių studijuoti senovės raštus. Bet rodos svarbiausia priežastis buvo ta, kad XVII — XIX šimtm. matematika taip nepaprastai sparčiai žengė pirmyn, augo ir vis naujas pritaikymų sritis stengėsi užkariauti, kad nebuvo jai laiko dairytis atgal, apžvelgti išeitąjį kelią. Matematikai ne tik buvo abejingi istorinėms matematikos studijoms, be net buvo susidarę nuomonę, buk išorinės mokslo studijos kenkiančios jo pažangai: kam esą jaunas, naujo siekiančias pajėgas atitraukti senų idėjų ir metodų studijomis nuo nauja kūrimo. Stengtasi rasti ir gilesnių filosofinių argumentų tai nuomonei paremti. F. Rosenberger paduoda pav. tokį istorinių studijų priešininkų vartotą argumentą*): „kiekvienas jaunas tvirtas mokslas, kaip bendrai visa, kas jauna, neturi istoriškumo dvasios, ir jei kuris mokslas ima istoriniais atminimais svajoti, tai yra tikras senumo ženklas“. Rosenberger čia pat teisingai pastebi, jog nėra jokio pagrindo grynai žmogišką surpatimą apie jauna ir sena taikyti be pabaigos augančiam mokslui ir priduria, jog mokslai, kaip tie graikų dievaičiai yra kartu ir jauni ir seni, dėstis kaip žiūrėti į juos, ar iš praeities ar iš ateities: jie, panašiai kaip senatvė, turi ilgą praeitį už savo nugaros ir, kaip jaunatvė, — didelę ateitį prieky“.

*) Ferd. Rosenberger, op. cit., pusl. 363.

Minėtos neigiamos nuomonės ilgai vyravo matematikų tarpe ir buvo remiamos, be minėtų, bendrai visiems mokslams taikytų argumentų, dar ir šiuo, specialiai matematikoje vartotu argumentu: „jei, esą, kuris senesnis matematinis veikalas tikrai turi savy pastovių teigiamų savybių, tai jos neabejojamai bus tobulesne forma išdėstytos naujesniuose veikaluose, — vadinasi, senesniųjų veikalų studijuoti nereikią; jeigu gi senas veikalas skelbia jau nugriautas nuomones, jo studijavimas yra be naudos arba dar gi kenkia"*). Autorius nuo savęs priduria, jog dabar tokia nuomonė būtų laikoma keista, dauguma matematikų sutinka, jog matematikos istorija ne tik yra savaime įdomi, bet ji daug sveria ir matematinėms studijoms ir neretai gali padėti pačiai mokslo pažangai. Įstorinių studijų svarbumą dar anksčiau aiškiai formulavo garsusis matematikas Lagrange, sakydamas, jog pavienios mokslo problemos tik surištos istorinėmis apžvalgomis vienos su antromis gali būti aiškiai suprastos atžvilgiu jų santykių su didžiąja visuma**).

Ilgą nepalankų matematikų nusistatymą matematikos istorijai galima ir tuo aiškinti, kad patys jos uždaviniai nebuvo aiškiai suformuluoti. Jei ji turėtų rinkti ir žymėti tik plikus mokslo praeities faktus, be kokio jų savytarpio ryšio ir santykio su kitais giminingais mokslais ir jųjų pažanga, tokia istorija, žinoma, vien mūsų įdomumą tegalėtų patenkinti, bet jos reikšmė pačiam mokslui tikrai pasidarytų gana problemiška. Todėl istorijos studijavimo šalininkai ėmė rimčiau tirinėti ir aiškiau fomuluoti to, palyginti, jauno mokslo uždavinius. Tuo klausimu šio šimtmečio pradžioje buvo daug diskutuota. Gana aiškiai, kad gal ir per daug bendrai formulavo kalbamus uždavinius Felix Müller, sakydamas: „Matematikos istoriografo uždavinys pirmoje eilėje yra parodyti, kada, kaip ir kieno buvo suformuluoti ir įrodyti pavieni matematikos dėsniai, kada ir kaip susidarė ir toliau augo ištisos matematinės disciplinos. Tačiau tuo negalima tenkintis. Istoriografas privalo mokėti nušviesti istorinį vedamųjų idėjų augimą; taip pat turi parodyti, kaip matematikos turinys buvo panaudotas kaip priemonė

*) Gustaf Eneström — Ziele und Aufgaben eines Organs für mathematisch-historische Forschung und für aktuellen Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaft — „Bibliotheca Mathematica", I t., 1899, pusl. 4.

**) S. Günther — Die Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung — cituota iš W. Ahrens op. cit. pusl. 261.

gamtai pažinti, ir kurios įtakos turėjo vadinamoji pritaikomoji matematika pačiam grynajam mokslui. Be to, jis privalo išaiškinti priežastis, kodėl tam tikrais laikotarpiais, tose arba kitose tautose matematika taip, ne kitaip vystėsi"*).

Labiau precizuoja šio mokslo uždavinius jau minėtas istoriografas G. Eneström ištisoje eilėje straipsnių, išspausdintų jo leistame rimčiausiame istoriniame žurnale *„Bibliotheca Mathematica"*, spietusiam aplink save visų kraštų istoriografus. Jis**) pabrėžia, kad ne tiek svarbu konstatuoti tų arba kitų istorijos paduodamų žinių tikrumas, kiek susekti ryšys tarp atskirų dalykų jų vystymosi eigoje. Jis pirmon galvon deda reikalą tirinėti pavienias teorijas ir susekti: kas kada yra apie tą teoriją rašęs (gal net abėcėlės tvarka reikią surašyti autorius); kurie ankstyvesni matematikos laimėjimai buvo pagrindu jai atsirasti; kurios įtakos toji teorija savo keliu padarė kitoms mokslo šakoms. Vadinasi, Enström pabrėžia būtiną reikalą istoriografui — pirmiausia iškelti ir suformuluoti matematikos istorijos pavienias problemas, nes pagal jų turinti būti renkama, tvarkoma ir įvertinama istorinė medžiaga. Iš to reikalavimo išeidamas Enström leidžia net kurti tam tikrus istorinius hipotezius apie spėjamą idėjų vystymosi eigą. Tik tokie hipoteziai, esą, turėtų būti paremti rimčiausiu šaltinių pažinimu, kitaip jie gali nukreipti tirinėjimus į netikrą kelią***). Enström laiko istorinių problemų tarpe ir klausimą, kiek yra nuveikęs moksle tas arba kitas matematikas, ypač jei norima ne tik pliki faktai surinkti, bet ir kritiškai jie nušviesti.

Pripažindami, kad Enström stato matematikos istoriografijai visai aiškius ir precizuotus uždavinius, vis dėlto tuojau pastebime, jog jie gal labiau tinka atskirų matematikos šakų ir teorijų istorijai, pavadintume — istorinėms monografijoms rašyti, bet ne bendrai matematikos istorijai, turinčiai apimti istorinių problemų visumą.

Polemikuodamas su Enström'u M. Cantor da kiek saviškiau nušviečia kalbamus uždavinius. Jis nurodo, jog pavadinime:

---

*) Felix Müller — Führer durch die mathematische Literatur, Leipzig, 1909, 252 pusl.

**) G. Eneström — Ueber Probleme der mathematischen Geschichtschreibung, „Bibl. math-ca", XI t., pusl. 1—10.

***) G. Eneström — Ueber die Bedeutung historischen Hypothesen für die mathematische Geschichtschreibung. „Bibl. m-ca", VIII t., 1905, pusl. 1—8.

„matematikos istorija“ galima daugiau svarbos dėti pirmajam žodžiui, kaip kad Eneström matomai yra linkęs daryti, arba daugiau domės kreipti į antrąjį žodį, kaip kad manąs ir savo darbais stengęsis parodyti pats Cantor. Savo nuomonę jis remia tuo, kad kaip tik reikią daugiau kreipti domės į pasireiškusį matematikos praeity žmonių ir tautų bendradarbiavimą, nes tuo būdu bus labiau pabrėžtas naujai iškeliamų idėjų ryšys su anksčiau skelbtomis ir nagrinėtomis. Reikia sutikti su Cantor'u, jog taip suprastoji matematikos istorija yra svarbi ir naudinga ne tik bendrai žmonijos civilizacijai, bet ir pačiai matematikai, nes daugiau žmonių ir tautų įtraukia į solidarų to mokslo darbą.

Klausiman, kuria medžiaga privalo naudotis matematikos istorikas, atsakymas rodos turėtų būti visai aiškus: pirmaisiais šaltiniais, kiek galima originalais. Tačiau, kaip teisingai pastebi Eneströ m*), čia atsiranda labai daug kliūčių, nes tada matematikos istorikui tektų būti kartu ir geru filologu, nuodugniai mokėti daug kalbų, pajėgti įsigilinti jų istorijon, o tai yra sunkiai suderinamas su matematika dalykas. Daug sunkumų sudaro ir tai, kad įvairiomis gadynėmis vartota labai įvairi terminologija ir simbolika. Dauguma matematinių dėsnių senovėje formuluota tik žodžiais, sunkia, kartais mistiška, net rebusų forma ir dažniausia taikyta konkretiems sprendimų nuotikiams, tad juose sunku susekti bendra minties eiga. Be to, daugelis matematinių dalykų įterpta į kitus mokslus ir t. t. Vadinasi, matematikos istoriografui, naudojančiam pirmuosius šaltinius, tenka visuose tuose dalykuose labai gerai orientuotis, jei jis nori išvengti stambių klaidų. Griežtasis matematikos istoriografų atžvilgiu Eneström pripažįsta, jog naudodamas pirmuosius šaltinius istoriografas yra garantuotas tik nuo kito interpretatoriaus arba vertėjo klaidų, bet pats nėra garantuotas nuo da sunkesnių suklydimų dėl tik ką sakytų sunkumų. Todėl ir Eneström sutinka, jog galima remtis ir kitų išaiškintais šaltiniais, tik, žinoma, su tam tikru atsargumu, kritiškai patikrinant komentatorių daromus išvadus. Eneström pavartojo čia pavyzdį, kaip rimtas matematikos isorijos žinovas Curtze**) savotiškai išaiškino graiko Herono taisyklę artutinei

*) G. Eneström — Ueber die Bedeutung von Quellenstudien bei mathematischer Geschichtsihreibung, „B. M.“, XII t., pusl. 1—20.

**) Max. Curtze — Quadrat- und Kubikwurzel bei den Griechen“ cit. iš „Bibl. M-ca“ XII t. pusl. 5.

kūbinei šakniai išreikšti. Ji Herono taip formuluota: „Kaip sužinoma šimto kūbinė šaknis, tuojau pamatysime. Paimk artimiausius šimtui didesnį ir mažesnį kūbinius skaičius. Tai bus 125 ir 64. $125 - 100 = 25$; $100 - 64 = 36$; $5 \cdot 36 = 180$; $180 + 100 = 280$ $\frac{180}{280} = \frac{9}{14}$; $4 + \frac{9}{14} = 4\frac{9}{14}$. Tokia bus artutinė šimto kūbinė šaknis". M. Curtze šią taisyklę išreiškė formula:

$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b \cdot \sqrt{(a+1)^3 - a^3 - b}}{a^3 + b + b\sqrt{(a+1)^3 - a^3 - b}}.$$

G. Wortheim*), giliau panagrinėjęs dalyką, tą pačią taisyklę išreiškė visai skirtinga, dabar laikoma teisinga formula:

$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{(a+1)b}{(a+1)b + a[(a+1)^3 - a^3 - b]}.$$

Vadinasi, visai skirtingus išvadus tenka padaryti ir dėl tų kelių, kuriais Heron bus priėjęs artutinės šaknies išreiškimo.

Da didesnio reikia atsargumo, kai tenka naudoti nematematikų išverstieji ir išaiškintieji raštai ir jų interpretuotos matematinės žinios.

Akivaizdoje tokių sunkumų matematikos istoriografijos darbui ir reiškiantis pačių matematikų tarpe sakytai rezervuotai nuomonei apie to dalyko mokslinę reikšmę, pravartu susipažinti su motyvais, kuriais matematikos istorija reikia laikyti turinčia svarbos pačiam matematikos mokslui.

Kai kuriems, daugiausia gal humanitariniams mokslams turi gilios prasmės lingvisto A. Schleicher'io pareikštoji mintis: „Jeigu mes apie kurį dalyką nežinome, kaip jis atsirado, tai jo ir nesurpantame"**). Matematinėms žinioms šis dėsnis gal ir netaikomas visa pilnuma, tačiau vis gi ir joms jis turi gilios reikšmės, nes net ir paviršutiniškai susipažinę su to arba kito mokslo evoliucijos eiga, geriau galėsime išskirti jo pagrindus ir atskirti nuosėdas, susidariusias kintamose laiko ir vietos sąlygose. Istoriškai dalyką imant ryškiai pastebimos svarbiausios mokslo rūmų dalys ir jų vaidmuo pačiam mokslui ir visai žmonijos kultūrai. Tokios perspektyvinės pažiūros į mokslą paprastai trūksta tiems, kurie pripa-

*) „Bibl. Math—ca", ibid.

**) Г. Лоренцъ, op. cit. I t., pusl. 88, epigrafas istoriniam skyriui.

žįsta vertės vien sistemingam moderninio mokslo dėstymui. Jie pasak Rosenberger'io*) sudaro ir susidaro įspūdžio, būk tas arba kitas mokslas yra tobulas šių dienų išradimas. Nekreipdami domės į šaknis, iš kurių jis yra išaugęs, ir nežinodami jo išeitųjų tobulėjimo etapų, jie dažnai nelaukia ir jo pažangos ateity, kartais net priešinasi tai pažangai, kiekvienoje pastangoje patobulinti tą arba kitą teoriją įžiūrėdami net tam tikrą pažeminimą jų išaukštintam mokslui arba da gi ir jiems patiems.

Tuo tarpu jau vien išradimų ir išradėjų istorija labai pamokina ir žavi žmones, gali uždegti juose karštą norą ir pasirįžimą dirbti mokslui, o tas yra jam taip pat labai didelės vertės dalykas. Mokslo teorijų istoriškas nušvietimas rodo mokslininkams, ypač jaunesniesiems, kelius, kuriais toje mokslo srity eita, kas yra atlikta, kokie uždaviniai formuluota, kurie jau išspręsta, kurie dar ne. Tas įveda jauną mokslininką tuojau *in medias res*, apsaugoja jį nuo bereikalingų ir dažnai klaidingų žygių. Matematikoje, lygiai kaip ir kituose moksluose, yra ištisa eilė pagrindinių sąvokų, (pav. funkcijos, integralo sąvokos), kurios laikui bėgant labai evoliuciavo, pagilėjo ir anot M. Simon**) tik istoriškai gali būti išaiškintos ir teisingai suprastos. Taip antai, neeuklidiškoji geometrija nuo istorinių studijų ypatingai laimėja***). Pravartu čia prisiminti ir nuomonė apie matematikos istoriją, senai išreikštoji vieno begalinių mažybių analizio kūrėjų, Leibniz'o: „Utilissimum est cognoscere veras inventionum memorabilium origines, praesertim earum, quae non casu, sed vi meditandi innotuere. Id enim non eo tantum prodest, ut Historia litteraria suum cuique tribuat, et alii ad pares laudes invitentur, sed etiam ut augeatur ars inveniendi, cognita methodo illustribus exemplis"****).

Rodos geriausiai suformulavo matematikos istorijos reikšmę pačiam mokslui Rosenberger[4]), bet kurio mokslo vystymosi eigą prilygindamas kreivei arba kreiviniam paviršiui, kurių kitimo dėsniai, arba matematiškos formulos nėra žinomos ir todėl tokia

---

*) Ferd. Rosenberger — op. cit. pusl. 373.

**) M. Simon — Geschichte der Mathematik in Altertum, Berlin, 1909; Vorw. XI pusl.

***) Fr. Engel-P. Stäckel — Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gausss—Leipzig, 1895, Vorw. pusl. V.

****) H. Wieleitner — Geschichte der Mathematik, Leipzig, 1909, pusl. 1.

[4]) Ferd. Rosenberger — op. cit. pusl. 377.

kreivė arba paviršius negalima tiksliai sukonstruuoti. Juo daugiau jos taškų arba ištisų dalių pažįstame, juo didesniu tikslumu yra galima atspėti jos tęsinys ateity arba praeity ir nustatyti jos eigos linkmė. Sistemingas mokslo dėstymas duoda tik taškus toje istorinės eigos kreivėje, gi mokslo istorija stengiasi sujungti juos vienon linijon. Tad mokslo dalyko istorijos pažinimas ne tik savaime gali būti labai įdomus, bet jis turi būtinai papildyti ir sistemingas moderninio mokslo studijas.

Susiduriame ir su klausimu apie grynai filosofinę matematikos istorijos reikšmę. Paimsime kad ir tokias grynai matematines problemas, kaip lygiagretumo, begalybės, manomumo (imaginariškumo) ir aktualaus dabar reliatyvumo problemos. Jos artimai kaimynauja su grynąja filosofija ir jų tokis arba kitokis išsprendimas matematikoje gali žymiai pakeisti mūsų visatavaizdį (pasauliažiūrą). Yra ir daugiau matematikos praeity problemų, kurių išaiškinimas duos raktą ne vieno laikotarpio žmonių visatavaizdžiui ir kitiems filosofiniams įsitikinimams paaiškinti ir suprasti. Tą mūsų nuomonę netiesioginiu būdu patvirtina filosofijos istorikas Falkenberg labai plačiai žinomoje naujosios filosofijos istorijoje*). Įžangoje (pusl. 6 ir 7) jis pabrėžia faktą, kad graikų filosofija turėjo daugiau estetinio pobūdžio. „Grožis ir tiesa turėjo graikams gimininges prasmės. Grožiui ir pasauliui (teisingiau — visetui) pavadinti jie vartojo tą patį žodį (Kosmos). Pasaulis yra graikui harmonija, meno padarinys, prieš kurį jis stovi sužavėtas ir maldingas. Iš formos jis pažįsta daikto esmę, tiksle ieško rakto vyksmui suprasti. Dangaus kūnai jam skrieja būtinai apskritimais, nes tos linijos yra tobuliausios". Pridursime nuo savęs, kad šis formos tobulumo supratimas gautas grynai matematišku keliu. Prisiminsime toliau labai gerai žinomą glaudų matematikos ryšį su muzika ir išaugusią iš to ištisą viseto teoriją — dangaus sferų harmoniją, kaip proporcijos ir tobulųjų geometriškų formų išreiškimą. Nuo graikų laikų iki šių dienų reiškiasi tendencija laikyti patenkinama tą kvantitatyvę (kiekybinę) visatavaizdžio teoriją, kuri pajėgtų išaiškinti fenomenus grynai geometriškai arba kinematiškai, trūksta tiktai veikalo, kuriame būtų sutraukta senųjų ir naujųjų laikų įrodymai tai tradicijai patvirtinti**).

*) R. Falkenberg — Geschichte der neueren Philosophie, 8 Aufl., Leipzig, 1908, XI+654.

**) Paul. Mansion — Note sur le caractère géometrique de l'ancienne astronomie, — Festschrift, pusl. 277.

Matematikos istorija sukelia daug filosofinio intereso kaip gyvas idėjų evoliucijos atvaizdas. Ta prasme humanitariniai mokslai ir menas labai plačiai naudojasi istoriniais metodais, o kai dėl pačios filosofijos, tai visas jos pažinimas dažnai paverčiamas kritiškomis istorinių sistemų studijomis. Tai duoda minimiems mokslams daug gerų progų išaiškinti jų ryšiui su visa žmonių žinija ir kelti aikštėn jų civilizacinę reikšmę žmonijoje.

Matematiniai ir eksperimentiniai mokslai palyginti mažai rūpinasi tuo dalyku, tarytum gėdydamiesi praeities klaidų arba laikydami save išimtinai naujųjų laikų padariniu ir tuo norėdami labiau pabrėžti savo skirtingumą nuo humanitarinių mokslų. Tuo tarpu ir tiksliųjų mokslų istorija filosofijos atžvilgiu neturėtų būti laikoma menkesnės vertės dalyku. Ir joje galima netik plikus faktus konstatuoti, bet rišti juos susektais ryšiais ir ieškoti loginių ryšių, jeigu jie da nėra žinomi. Joje galima kurti ir hipotezius, kurie pasak Eneström'o*) gali palengvinti praeities pažinimą, nes kartais leidžia apvienyti daugelį šiaip išsklaidytų faktų.

Tarp ko kita, matematikos istorija teikia gerą progą pasekti tiek išgarsinto savo laiku biogenezinio dėsnio tinkamumą arba netinkamumą matematikai. Einant juo, kaip žinome, laikoma, jog atskiras žmogus, fiziškai ir dvasiškai augdamas, gauna pagreitintai išeiti tokias pačias stadijas, kokias yra išėjusi visa žmonija. Tiesa, tas dėsnis, ypač paskutiniais laikais, nėra visų laikomas visuotiniu ir būtinai pasireiškiančiu visuose individuose ir visais atvejais. Tačiau jo iškeltoji analogija, jei ir nelaikyti jos įrodamąja priemone, daug ką padėjo geriau išaiškinti. Todėl labai yra įdomu ir paidagoginiu atžvilgiu svarbu palyginti, kaip turtėjo žmonių žinija matematinio pažinimo atžvilgiu ir kaip vystosi ta prasme atskiro žmogaus psichika. Žinoma, kai imama lyginti žmonijos ir atskiro žmogaus evoliucijos etapai, pastebėjus panašumą, nedera užmiršti ir didelio esminio skirtumo, į kurį kreipia domės M. Cantor**) sakydamas: „Vaikas nuo gimimo dienos viso ko mokosi iš žmonių, žmonija gi neturėjo iš ko pasimokyti, nebent iš laukinių žvėrių. Be to, įgimtas fizinis žmogaus silpnumas (palyginti su kitomis žemės gyvijos rūšimis) sudarė ir jo tvirtumo sąlygas: jis priverstas buvo galvoti ir imtis išradimų savo gyvybei išsaugoti ir būviui pa-

*) G. Eneström — op. cit. pusl. 3.
**) M. Cantor, I, pusl. 3.

gerinti". Žymus Anglijos paidagogas ir novatorius matematikos srity Branford tvirtina*), kad šis biogenezinis dėsnis matematinio pažinimo atžvilgiu tikrai pasiteisina, ką, esą, patvirtinta iš vienos pusės—mūsų patyrimas matematikos dėstymo srity, iš antros pusės—matematikos istorijos faktai. Prakalboje jis net reiškia mintį, jog matematinių mokslų istorija sudaranti vieną mokymo istorijos dalį ir todėl jis labai proteguoja istorines atskirų mokslų studijas ir nusiskundžia, kad paprastai tik paaiškinamas paidagogams to dalyko paidagoginis svarbumas ir reikalas laikomas atliktu. Tuo tarpu nei vienas bendrasis dėsnis nėsąs taip svarbus paidagogijai, kaip kad kalbamasis biogenezinis dėsnis**), Esą, gal artimiausioje ateity paidagogai dės savo praktikos pagrindan šį dėsnį, mes gal ir nesvajojame apie visus pritaikymo galimumus. Tik pirmiau, nei daryti iš šio kokių praktiškų išvadų, mes, žinoma, privalome patirti iš istorikų, kuriais gi keliais ir etapais žengė mokslas praeity. Branford neturi iliuzijų, kad to uždavinio tinkamas išsprendimas būtų lengvas; jis pastebi, jog gal ištisa paidagogų karta turės tuo darbu užsiimti, kad prieitų tikrų rezultatų. Pats jis minėtu savo veikalu daro rimtą mėginimą sukurti visą matematikos dėstymo planą ir metodus pasiremdamas biogeneziniu dėsniu, kurį neaiškiai nujautė jau Platonas, vėliau reiškė Condillac, Comte ir paidagogijai formulavo Herbert Spencer. Ar pasiteisins sakytos Branford'o mintys visa pilnuma, ar tik dalinai, — matematikui - paidagogui yra būtina sekti savo dalyko istorija, nes iš jos vis tiek galima turėti daug naudos metodų įvertinimo atžvilgiu.

M. Simon***) kreipia mūsų domę ir į tai, jog matematikos istorija padeda surpasti ir išaiškinti sunkumus, kuriuos žmonių dvasia gavo nugalėti, spręsdama įvairias problemas, rodo mokiniams ryšius tarp įvairių kultūros darbo sričių ir tuomi kelia aikštėn žmonių dvasios vieningumo idėją. Tą mintį jis iliustruoja gražiu Rudio pavyzdžiu, kaip garsusis Regiomontanus (Johann Müller) tyliu efemeridų skaičiavimo darbu paruošė priemones, kuriomis pasinaudodamas Krištupas Kolumbas apskaičiavo savo kelionę ir atrado Ameriką.

---

*) B. Branford — op. cit. pusl. 49.
**) B. Branford — op. cit. pusl. 48 ir 72.
***) M. Simon — op. cit., įžanga, pusl. X.

Paidagoginiais motyvais labai vertina istorines mokslų studijas ir minėtas Rosenberger. Konstatuodamas žinomą mums faktą, kad ir turinio ir metodų atžvilgiu vadinamieji empiriniai mokslai mokyklų praktikoje labai skiriami nuo humanitarinių ir tarp jų net susidaro kenksmingas paidagoginių atžvilgiu antagonizmas, jis primena, jog tie mokslai praeity mokėjo labai gražiai sugyventi pavieniuose asmenyse ir tautose. Supažinus mokinius su tų mokslų istorija bus duota gražus įrodymas, jog tos mokslų sritys tikrai gražiai viena antrą papildo ir kartu sudaro darnią vienumą.

H. Timmerding*) kreipia domės ir į šį žinotiną paidagogams dalyką. Jis sako, kad jei matematika tikrai auklėjamai veikia mokinius, tai šis jos veikimas neabejojamai turėjo pasireikšti amžiams bėgant, tad to mokslo praeitis duoda mums raktą dabartiniam stoviui suprasti ir padeda teisingai įžvelgti į tikruosius matematikos dėstymo uždavinius ir nustatyti jos tikrąją vietą auklėjamųjų dalykų visumoje.

Toliau, analizuodamas tame pačiame veikale (pusl. 153) mokinio psichinius procesus, kuriuos sukelia matematinis pažinimas, Timmerding teisingai pastebi, jog jei mokiniui ne tik bus patiekiamos galutinai suformuluotos matematinės idėjos, bet bus jos istoriškai nušviestos ir bus parodyta, kaip jos atsirado, kiek daug atskirų žmonių darbo jose įdėta ir kaip glaudžiai jos yra susijusios su visa žmonijos kultūros eiga, mokinys neabejojamai geriau supras ir pajus gyvą dvasią, dvelkiančią iš matematinių figūrų ir formulų. Jis pripras vertinti ir elementariausias priemones, kurias gauna pavartoti pirmus žingsnius matematinian pažiniman žengdamas, kai matys, kad joms surasti ir tinkamai suformuluoti prireikė tūkstančių metų ir nesuskaitomų žmonijos kartų ir kad tame ilgame kely užtinkami įžymiausi dvasinio gyvenimo žmonės**). Jis išmoks vertinti kiekvieną gyvą mokslo darbą, ne tik tokį, kuris gautais efektingais išvadais gali sukelti pagarbą mokslui net ir tamsioje minioje, kaip nurodo ryškiais pavyzdžiais

*) H, Timmerding — Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung, Leipzig, 1914, pusl. 16.

**) Alf. Nagl — Der Rechenmethoden auf dem griechischen Abakus— Festschrift, pusl. 335.

Voss*). Panašiai argumentuoja matematikos istorijos naudai ir Enestrom**).

Rosenberger***) atremia matematikos istorijai kaltinimą tariamuoju nepaidagogiškumu: esą tokia istorija rodanti jaunimui, entuziastiškai siekiančiam naujų laimėjimų, kaip daug praeity buvo skelbta klaidingų, vėliau nugriautų idėjų. Tas, esą, gali sukelti jame abejonių ir dėl dabar skelbiamo mokslo ateities. Atremdamas šį priekaištą Rosenberger nurodo, jog istorija ne vien skelbtasias klaidas sumini, bet aprašo gražius išradimus, piešia nepaprastus žmonių laimėjimus, sukeliančius jaunime didingų darbų troškimą, kuris gali ir privalo būti gerai panaudotas paidagoginiams tikslams.

Visi suminėtieji teigiamieji motyvai nugalėjo daugelį statytų matematikos istorijai kliūčių, iškėlė reikalą susirūpinti jąja ir skirti jai prideramą vietą aukštosiose ir aukštesniosiose mokyklose. Gal prisidėjo ir bendrai pasireiškęs XIX šimtmety, ypač antrojoje jo pusėje, susidomėjimas istorinėmis studijomis ir dvasinių mokslų srity, tarsi žmogaus dvasia, kaip pastebi Haller****), trokštų pamatyti save pratęsto ir pralekiančio laiko veidrody. Toji tendencija pastebima ir platesniuose žmonijos sluoksniuose. Gražus netrūkumo, kontinuiškumo, vaizdas suteikia žmonėms didelio pasitenkinimo, naturalu to vaizdo ieškoti ir matematikos vystymosi eigoje.

M. Simon pastebėjo ir da vieną visai svetimą mokslui priežastį, skatinusią matematikus susidomėti istorinėmis studijomis. Toji priežastis — išbujojęs XIX šimtmety nacionalizmas, šiaip dažnai mokąs blogai paveikti teisybės praeity ieškojimą. Mokslų ir išradimų istorijoje jis dažnai vertė mokslininkus, jų skaičiuje ir matematikus, kelti ginčus dėl tos arba kitos tautos prioriteto atskirų mokslų ir teorijų išradimo srity. Tokie ginčai gerokai pastūmėjo pirmyn ir matematikos istorijos mokslą*).

---

*) A. Voss — Die Beziehung der Mathematik zur Kultur der Gegenwart, Leipzig 1914, pusl. 2.

**) G. Enestrom — Die mathematisch-historische Forschung und der mathematisch-historische Schulunterricht — „Bibl.-Math", XIV t.; 1913—14, pusl. 2.

***) Ferd. Rosenberger — op. cit. pusl. 364—366.

****) A. Haller — Ueber Die Aufgaben einer Geschichte der Physik Festschrift, pusl. 177.

*) M. Simon — op. cit., pusl. XI.

Šiaip ar taip, XIX šimtm. antroje pusėje matematikų labai susidomėta jų mokslo praeitimi. Susikūrė naujas matematikos istorijos mokslas, kuris sparčiai augdamas, reikalavo vis daugiau maisto iš praeities ir, veržiamasis išsiplėsti, išsišakoti, stengėsi įtraukti darban daugiau žmonių. Atsirado būtinas reikalas leisti ir žurnalus, skirtus tam jaunam mokslui*). Pirmas toks žurnalas išėjo Paryžiuje (1855 — 1862) pavadinimu: *„Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques"* (leidėjas O. Terquem); greitu laiku (1859 m.) išėjo žurnalas: *„Zeitschrift für Mathematik und Physik"*; įėjus jo redakcijos sudėtin M. Cantor'ui susidarė atskiras žurnalo skyrius: *„Historisch-Litterarische Abteilung"*, vėliau (1877 m.) virtusi atskiru leidiniu: *„Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik"*. Italijoje Baldassare Buoncompagni nuo 1868 m. pradėjo leisti *„Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche"* ir išleido 20 storų tomų. Nuo 1884 metų buvo pradėjusi eiti *„Bibliotheca Mathematica"*, greitai sustojo, paskiau vėl buvo pradėjusi eiti ir ėjo iki 1897 m., tačiau nebuvo skirta specialiai matematikos istorijai. 1899 m. trečiu atveju išėjo tas žurnalas jau kaip organas, specialiai skirtas matematikos istorinėms studijoms. Jo leidėjas ir aktingiausias bendradarbis Gustaf Eneström (Stockholm) sugebėjo įtraukti darban rimčiausias moksliškas pajėgas iš visų kraštų ir tas žurnalas pasidarė svarbiausiu ir aktualiausiu paskutinių laikų matematiškai - istoriniu žurnalu. Jo straipsniais mums tenka čia labai plačiai naudotis. Medžiagos matematikos istorijai atsiranda ir bendruose matematiniuose žurnaluose, kaip štai: *„Jaurnal für die reine und angewandte Mathematik"* (Crelles Journal) *Journal des Mathématiques pures et appliquées"*, *„Archiv der Mathematik und Physik"*, jau minėtame žurnale — *„Zeitschrift für Mathematik und Physik"*, *„Mathematische Annalen"* (Clebsch), *Acta Mathematica* (Mittag - Leffler) ir kit.

Tokiose apystovose vystėsi matematikos istorijos mokslas, kuriame labai daug pasidarbavo Moritz Cantor. Jo darbuotei tame moksle nušviesti skiriama šios studijos antroji dalis.

---

*) Negalėdami tų visų žurnalų pasiekti, paduodame žinias apie juos iš G. Eneström'o programinio straipsnio „Ziele und Aufgaben eines Organs für mathematisch-historische Forschung und für aktuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften—„Bibliotheca Mathematica", I t.. 1899 pusl. 1—7.

II. Moritz'o Cantor'o gyvenimas ir darbai.

Apie Moritz'o Cantor'o gyvenimą mažai teturime žinių. Neturėdami ištisos jo biografijos, gauname tenkintis beveik išimtinai medžiaga, kurią Cantor'o 70-metinių sukaktuvių proga patiekė žurnale: „Bibliotheca Mathematica" didelis Cantor'o gerbėjas, matematikos istorijos žinovas M. Curtze*).

Moritz Cantor gimė 1829 m. rugpiūčio mėn. 23 d. Mannheime, bet jo tėvai greita persikėlė gyventi Frankfurtan a. M. Ten tėvai norėjo atiduoti jį gimnazijon, bet įsitikinę, kad jis dar nepajėgs eiti gimnazijos mokslų, atsiėmė iš gimnazijos ir privatiškai jį mokino. Vėliau jis įstojo į aukštesnes gimnazijos klases ir baigęs ją 1848 m., ėmė studijuoti matematiką Heidelberge ir Göttingene pas garsius matematikus — Gauss'ą ir Weber'į, kuriuos jis paskui dėkingai minėjo iki savo ilgo amžiaus pabaigos. 1851 m. jis apgynė Heidelberge daktaro laipsniui įgyti disertaciją tema: *„Ueber ein wenig gebrauchtes Koordinatensystem"* (Frankfurt a. M. 1851 m.). Šiame veikale Cantor, kaip beveik tuo pačiu laiku ir B. Tortolini**) išplėtė koordinatų transformacijos metodą, panaudojo kreivės taško padėčiai nustatyti jo abscisą x ir kreivės lanką S. Tada kreivė liko išreikšta lygtimis: $F(x;S) = o$ arba $S = f(x)$. Iš to gaunasi: $ds = f'(x)dx$, ir kadangi be to žinoma, jog $dx^2 + dy^2 = ds^2$ tai y-ui reikšti gaunama formula:

$$y = \int \sqrt{[f'(x)]^2 - 1}\, dx.$$

Tuo keliu einant gaunamos savotiškos formulos kreivės lietėjai, kreivumui, jo spinduliui reikšti, nustatomas savotiškas lanko sąryšys su abscisa ir kit. Cantor nuodugniai ištyrė lankines koordinatas, atkreipė domės į tokias kreives, kurios yra visiškai manomosios, išnagrinėjo lankinių koordinatų pagalba bendrasias antrojo laipsnio lygtis, binomines kreives ir kaikurias transcendentinės kreives (grandinę liniją) ir ėmė nagrinėti evoliutas ir lygiagretes kreives.

Jau įgijęs daktaro laipsnį jis dar iki 1855 m. studijavo Berlyne matematiką pas garsųjį matematiką Lejeune-Dirichlet. Tuo

*) Maximilian Curtze — Zum siebenzigsten Geburtstage Moritz Cantors — „Bibl. M-ca", I t., 1899 m., pusl. 225—231.

**) G. Loria — Specielle algebraische und transcendente ebene Kurven — Theorie und Geschichte, II t., 2 laida, Leipzig, 1911 m., pusl. 231.

metu jis parašė *„Grundzüge einer Elementarmathematik"* (Heidelberg, 1855), kuriame, tarp ko kita išnagrinėjęs įvairiai parašytus kompleksinius skaičius ir įvedė atskirą vardą dvinariui $\cos\varphi + i\sin\varphi$ pavadinęs jį linkminiu koeficientu (Richtungskoeffizient).

Po šių pirmųjų bendro matematinio turinio darbų M. Cantor ėmė ryškiai krypti matematikos istorijos pusėn, pradėjo aktingai bendradarbiauti naujame matematiniame žurnale „Zeitschrift für Mathematik und Physik", (pradėjo eiti 1856 m.). Vėliau jis parašė neistorinio turinio tik veikalėlius: *Gesetz und Zufall* (1878 m.) ir *Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens* — Leipzig, 1898 m.

Pirmasis Cantor'o istorinis straipsnis, atspaustas kalbamam žurnale, buvo: *Ueber die Einführung unserer jetzigen Ziffern in Europa.* (1856 m.). Greitu laiku jis parašė: *Ueber die Porismen Euklids und seine Divinatoren,* toliau — du referatu Vokietijos gamtininkų susirinkimams (Naturforscherversammlung) Bonne ir Karlsruhe: *Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus, — drei mathematische Charakterbilder aus dem XVI Jahrhundert* ir: *Zur Geschichte der Zahlzeichen* su žinute: *Petrus Ramus in Heidelberg.*

1858 m. kartu su Kekulé, Lewinstein'u ir Eisenlohr'u Cantor įsteigė žurnalą: *„Kritische Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik"*, kuris tačiau dėl leidėjo nedrąsumo sustojo po pirmųjų metų. 1859 m., Benijaminui Witzschel'iui mirus, Cantor buvo įtrauktas į žurnalo *„Zeitschrift f. Math. u Physik"* istorinio skyriaus redakciją; vėliau, tam skyriui virtus atskiru leidiniu *(„Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik")*, jis nuo 1879 m. buvo jo redaktorium.

Pirmas žymus Cantor'o istorinis veikalas buvo išleistas 1863 m. pavadinimu: *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker.* Šis veikalas labai iškėlė autoriaus vardą. Tuo metu jis buvo Heidelbergo universiteto pakviestas matematikos istorijos profesorium ir čia prasidėjo vaisingiausias jo darbas. Šiek tiek anksčiau jis buvo apsilankęs Paryžiuje, kur jį nepaprastai nuoširdžiai priėmė jau senyvas garsusis geometras, matematikos istorijos žinovas ir rašytojas Michel Chasles ir supažino su kitu jau išgarsėjusiu matematiku J. Bertrand'u. Jie įtraukė Cantor'ą į francūziškų moksliškų žurnalų bendradarbius, ypač kad Cantor mokėjo francuzų kalbą taip, kaip savo gimtąją.

Likęs Heidelbergo universiteto matematikos istorijos profesorium, Cantor atsidėjęs visu karščiu gilino, turtino savo matematines istorines žinias ir patalpino daugybę straipsnių įvairiuose moksliškuose laikraščiuose. Žymesnieji jų buvo: *Euklid und seine Jahrhundert* (1867 m.), *Die römische Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst* (1875 m.), *Graeco - Indische Studien* (1877 m.). Del romiškųjų agrimensorų, kitaip gromatikais vadinamų, vyravo pirmiau tokios nuomonės, kad jie buvę grynieji amatininkai, išlavintieji senosios Aigipto matematikos įtakoje, tad su labai atsilikusiomis matematinėmis žiniomis. Juos Cantor nuodugniai išstudijavo sakytame veikale ir įrodė, jog agrimensorų vartotos priemonės nebuvo paprasti prietaisai tik rankomis manipuliuoti, bet kad juose slėpėsi gilesnė prasmė.

Tuo pačiu metu Cantor nemažai pasidarbavo kartu su filologu *Aug. Eisenlohr'u*, padėdamas anam išaiškinti ir sutvarkyti neaiškius dalykus vadinamam Rhind'o papiruse; aktingai dalyvavo įvairiuose moksliškuose suvažiavimuose. R u d i o*), rašydamas atsiminimus apie savo pažintį su Cantor'u, papasakoja, kaip 1877 m. filologų suvažiavime (Wiesbadene) matematikos sekcijoje Unverzagt'ui iškėlus reikalą išplėsti matematikos kursą aukštesniosiose mokyklose, Cantor giliu įsitikinimu ir dideliu karščiu rėmęs ir gynęs Unverzagt'o tezius, kurie jo nuomone turėję suteikti realėms mokykloms matematinių gimnazijų pobūdžio ir pakelti jas lygion aukštumon su humanitarinėmis gimnazijomis.

M. Cantor labai veikliai dalyvavo daugybėje žurnalų ir laikraščių. C u r t z e**) ilgame (25 pusl.) straipsny patiekė sąrašą žinomų jam Cantor'o raštų, išėjusių iki 1899 m., ir sumini net 24 žurnalus ir laikraščius, kuriuose Cantor bendradarbiavio. Be jau minėtų žurnalų, paminėtini dar šie: *„Bulletino de Bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche"*, *„Comptes rendus de l'Académie des Sciences"* (Paris), *„Bulletin des Sciences mathématiques"*, *„Nouvelles Annales de Mathématiques"*, *„Allgemeine Deutsche Biographie"* ir kit.

---

*) F e r d. R u d i o — Die Unverzagt'sche Linienkoordinaten — Festschrift, pusl. 383—397.

**) M a x. C u r t z e — Verzeichnis der mathematischen Werke, Abhandlungen und Recensionen des Hofrats Prof. D. Moritz Cantor — Festschrift pusl. 625—650.

Benagrinėdamas atskiras istorines problemas, besigilindamas į istorines matematikos studijas Cantor pasirįžo rašyti ir bendrą matematikos istoriją. Nuodugniai pasidarbavęs ta linkme keliolika, o gal ir daugiau metų, jis 1880 metais išleido tiek visų lauktą jos I-jį tomą, pavadinimu: *„Vorlesungen über Geschichte der Mathematik"*, apėmusį laikotarpį nuo seniausių laikų iki 1200 m.[1]). Veikalas visų, kas domėjosi matematikos istorija, buvo labai gerai sutiktas ir aukštai įvertintas ir turinio ir formos atžvilgiu. Tą liūdija tuometinės spaudos nuomonė, tą tvirtina ir geras matematikos istorijos žinovas ir minėtas Cantoro biografas, teisingiau — bibliografas C u r t z e[2]), pabrėždamas charakteringus veikalo ir jo autoriaus bruožus: sąžiningumą ir mokėjimą įeiti kiekvieno studijuojamo senovės veikalo arba atskiros gadynės dvasion, prieiti prie jų su anų laikų, bet ne XIX šimtmečio matu, skirti kiekvienam tai, kas jam tikrai priklauso. Knyga buvo pripažinta klasišku matematikos istorijos veikalu, kuris, kad ir susilaukė vėliau, kaip matysime, kritikos, tačiau iki šių laikų nėra geresnio nukonkuruotas. Geras matematinės literatūros žinovas F. M ü l l e r ir 1909 m. rašė matematinės literatūros apžvalgos pradžioje (pusl. 3)[3]), jog tai yra veikalas, kurio neturi trūkti nei vieno matematiko bibliotekoje, nes jis yra geriausiai orientuotas apie dabartinį matematinių mokslų istorijos stovį.

Nekantriai laukta II tomo. Tačiau Cantor nesiskubino jį leisti; rašė, taisė savo veikalą ir išleido II tomą tik po 12 metų[4]). Greitai po to jam teko leisti I-jo tomo jau antroji laida (1894). Atsižvelgdamas į gausingą susidariusią del I-jo tomo literatūrą, kritiką, papildymus, Cantor gerokai perdirbo ir papildė I-jį tomą antroje laidoje (padidėjo 80-čia puslapių). III tomas pasirodo tik 6-ms metams praėjus po II tomo[5]). Šio tomo prakalboje jau senyvas mokslininkas sakosi turįs pavesti veikalo tęsinį rašyti jaunesniems žmonėms, o pats ketinąs tik gerinti ir tobulinti pirmu du tomu. Vis delto ir nuo veikalo tęsimo jis nevisai atsisakė:

---

1) Leipcig, Teubner, 1880 m. VIII + 804 pusl.

2) M a x. C u r t z e — op. cit. pus. 229.

3) F e l i x M ü l l e r, — op cit. pusl. 252.

4) M. C a n t o r — Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II Bd. (1200—1668), Leipzig, Teubner, 1892; X+863 pusl.

5) M. C a n t o r — Vorlensungen... III. Bd. (1668—1758) 1898 m. Leipzig, Teubner, XIV + 893 pusl.

10 metų praslinkus išėjo IV tomas*). Tačiau šis didžiulis tomas jau ne vieno Cantoro parašytas, bet rinktinis; jo atskirus skyrius parašė: S. Günther, F. Cajori, E. Netto, V. Bobynin, A. v. Braunmühl, V. Kommerell, G. Loria, G. Vivanti, ir C. R. Wallner. Pats Cantor įdėjo tan toman tik periodo nuo 1758 iki 1799 m. apžvalgą. Todėl prakalboje jis pasisako jam drovu esą net lydimą žodį tarti ir daraąs jis tai tik todėl, kad šis tomas tikrai esąs jo parašytų 3 tomų tęsinys, kad jis pats esąs kaip ir centrinis asmuo ir vyriausias amžiumi bendradarbių tarpe.

„Paskaitos" labai gražiai, daugelio stačiai entuziastiškai sutiktos ir įvertintos, nepaprastai išaukštintino autorių ir padarė jį pasauline garsybe. Jo 70-metinės gimimo sukaktuvės (1899 m.) buvo kulminacinis jo garbės ir triumfo momentas. Šventėn asmeniškai ir raštais atsiliepė daugybė žmonių ne tik iš Vokietijos, bet ir iš viso plataus pasaulio. Labai aktingai prisidėjo miestas Heidelberg, kuriame jis ne tik išgyveno pusę šimto metų, bet buvo jo savivaldybėje veikliu atstovu, dažnai vaidinusiu joje vieną vadovaujamųjų rolių. M. Curtze buvo sužavėtas M. Cantor'o moksliškais bei visuomeniniais triumfais ir gražia šeimynine laime.

Žurnalas „Zeitschrift für Mathematik und Physik", Cantor'ui kaip savo ilgamečiam bendradarbiui ir „Abhandl. zur Geschichte der Math." redaktoriui, supynė labai gražų jubiliejinį vainiką: išleido specialį tomą (IX Heft 657 pusl. in 8°, pavadintą „Festschrift" ir dedikuotą Contorui). Šiame tome 32 mokslininkai iš įvairių kraštų įvairiomis kalbomis padėjo savo moksliškus straipsnius, daugiausia iš matematikos istorijos ir dalinai didaktikos sričių, o M. Curtze — pridėjo daug bibliografinių žinių apie jubiliato raštus. G. Eneström, laikęsis labiau už visus rezervuotai Cantor'o darbų ir nuopelnų atžvilgiu, recenzuodamas „Festschrift"**), pripažįsta, jog tikrai nėra gražesnio būdo išreikšti tam tikros srities specialistui mokslininkui jo draugų ir bendradarbių pagarbą ir padėką, kaip kad savus tos srities tirinėjimus sunešti jam kaip švenčių dovaną. Eneström ta proga neužmerkia akių ir į tai, jog toks rinktinis veikalas paprastai negali išvengti

*) M. Cantor — Vorlesungen (1758—1799) — 1908 m., Leipzig, Teubner, VI + 1113 pusl.

**) G. Eneström — „Bibl. M—ca", I t. 1899 m. pusl. 288.

to, kad jame greta vertingų dalykų ne atsirastų ir silpnesnių, kaip kad šiuo atveju taip pat atsitikę.

Jubiliejinio tomo (Festschrift) prakalbos vietoje, leidėjų įgaliojimu padėtas Maximil. Curtze ir Sigm. Günther'o pasirašytas adresas. Jame gražiai ir teisingai pasakyta, jog nevienam lemta sulaukti psalmisto amžiaus, bet reta kam tenka sulaukti jo, kaip jubiliatui, su nesumenkėjusiomis fizinėmis ir dvasinėmis jėgomis. Toliau adrese konstatuojama, jog parašęs ištisą eilę paruošiamųjų darbų, Cantor pagalios sukūręs veikalą, kuris, kaip niekuomet nei vienas kitas veikalas, yra patarnavęs naujai mokslo šakai, ir iš kurio visais laikais spinduliuosiąs kitiems paraginimas. Visos tautos žiūrinčios į tą pavyzdingą veikalą (Standard Work), kurį sukūrė šis Vokietijos mokslininkas. Jam priklausanti garbė ir už tai, kad jis savo darbu iškėlė tą naują discipliną iki akademinio dalyko, kuris liko įvestas ne tik vokiškuose universitetuose. Adresas pabrėžia ir tai, kad jo sukurtasis moksliškų interesų bendrumas, nežiūrįs nei tautinių nei valstybinių skirtumų, reiškiasi ir pobūdžiu aukojamo jam veikalo, kurį jo draugai ir garbintojai norėtų jam įteikti garbingame jo jubiliejuje kaip iškalbingą įrodymą, kad jo pavyzdys ir darbai sukuria kultūringame pasauly gražų sekimą.

Žinoma, tokiame specifiškos reikšmės ir pobūdžio rašte, kaip štai jubiliejinis adresas, galėjo būti šis tas ir per daug sutirštintai (kad nepasakius — perdėtai) pasakyta. Vis dėlto kiekvienas, kas gavo susipažinti su Cantor'o darbais ir žino, kaip maža buvo nuveikta matematikos istorijai anksčiau, prieš Cantor'ą, turės sutikti, jog M. Curtze ir S. Günther neturėjo reikalo bijotis perdedą keldami taip aukštai jubiliato nuopelnus tai mokslo šakai. Jo „Verlesungen" tai tikrai yra pirmas rimčiausias, pilniausias matematikos istorijos veikalas. Įsižiūrėjus į jį tenka giliai nusistebėti autoriaus padėtuoju milžinišku darbu,, kurį tegalėjo atlikti žmogus, tiek gyvenęs, kaip Cantor. Jo surinktoji ir suvartotoji medžiaga stačiai slėgia žmogų gausybe bei įvairumu ir turinio ir kalbų atžvilgiu; čia randame greta grynai matematinių raštų visokius kitus: bendrai istorinius, filosofinius, filologinius, geografinius ir daugelį kitokių raštų (knygų, žurnalų), iš kurių jis stengėsi ištraukti matematinę medžiagą. Ji tuose raštuose pasitaikydavo labai neaiškiai išdėstyta, supainiota, o tų raštų autoriai, vertėjai ir interpretatoriai, dažnai nenusimanydami ir nesirūpin-

dami apie matematiką, dar daugiau ją supainiojo. Visa tai Cantor gavo ne tik paskaityti, bet giliai išanalizuoti, palyginti su įvairiomis versijomis, konfrontuoti su kitais šaltiniais ir t. t. Paimsime pavyzdžiui kad ir tokią aigiptiečių matematiką: Cantor ne tik tiekia žinių, koki trupmenų veiksmų pavyzdžiai vartota, bet stengiasi išaiškinti, restauruoti ir patį trupmenų veiksmų mechanizmą, o tai yra dalykas labai nelengvas ir varginantis, kaip rodo jo pavartotasis pavyzdys*), kaip galėjo būt išreikšta trupmena $^{7}/_{29}$ pagrindinių dalių (trupmenų su skaitliais 1) suma:

$$\frac{1}{87}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{2.32}+\frac{1}{6};$$

arba jo pastangos išaiškinti painų tūrių skaičiavimo mechanizmą, kai kurių dydžių reikšmės ir kit. Kaip žinome, čia jis daug padėjo kalbininkui Aug. Eisenlohr'ui išaiškinti Ahmes'o rankraštį.

Ne mažesnio vargo jis turėjo, stengdamasis išgauti ir išaiškinti matematinę medžiagą senuose indų ir chinų raštuose. Ten matematinės žinios buvo dažniausia įterptos į kitokio turinio raštus visokių galvosukių ir ūkanotai išreikštų minčių forma. Pav., Cantoro nagrinėtasis senas chiniškas raštas (vertimuose) *Tcheoupei* (arba *Tcheou pei swan king* — šventa skaičiavimo knyga) prasideda tokiais sakiniais: „Skaičių mokslas yra kilęs iš apskritimo ir stačioje keturkampio. Apskritimas atsiranda iš stačiojo keturkampio ir stačiasis keturkampis atsiranda iš apskritimo. Kuu — t. y. kampo matas (matlankis?) yra kilęs iš 9-syk 9, kas sudaro 81. Tad dalyk kampo matą ir t. t. Išvadas iš keleto tokių sakinių čia pat šiaip reiškiamas: „Mokslas, kuriuo naudojosi Yu (Dievas) tvarkyti visam, kas tik yra po dangumi, remiasi tais skaičiais".

Daug triūso reikia padėti tokiems raštams dešifruoti ir dažnai galima suklysti, nes ir vertėjai - kalbininkai klysdavo versdami matematinius raštus ir terminus. Ne be to, kad ne būtų ir Cantor suklupęs tai vieną tai antrą tokią mįslę spėdamas, tačiau daugumoje atvėjų jis mokėjo labai vykusiai išaiškinti neaiškumus, ką pripažįsta net ir gerokai jam nepalankūs kritikai, kaip štai Eneström.

Galima būtų manyti, kad jau bent klasikinis graikiškasis matematikos istorijos periodas neturėjo sudaryti panašių sunkumų,

*) M. Cantor — I, pusl. 63.

nes tada jau matematika išplaukė iš visokio misticizmo rūkų ir šiaip istorinės žinios apie tuos laikus yra pilnesnės, tikresnės. Tačiau ir ši gadynė sudaro matematikos istorikui labai daug sunkumų. Vyriausias sunkumas yra tas, kad labai maža originališkų anos gadynės raštų yra pasiekę mūsų laikus. Dauguma matematinių veikalų išliko tik arabų vertimuose arba buvo iš fragmentų restauruota. Arabai, versdami graikiškus veikalus, mokėjo savotiškai juos iškraipyti, dažnai painiojo vardus, vietas, metus ir šiaip ne visada mokėjo kritiškai įvertinti šaltinius. Berestauruojant iš tokių vertimų senovės veikalus vėl gi niekas nebuvo apdraustas nuo suklydimų. Tad ir graikų matematikos periodas pagimdė eilę sunkiai išsprendžiamų, o gal ir visai neišsprendžiamų problemų. Paimsime pavyzdžiui kad ir garsiąją H e r o n'o problemą. Daug buvo ginčų apie Heron'o gyvenimą ir darbus: vieni laike jį gyvenus III šimtm. pr. Kr., kiti — net apie 200 m. po Kristaus; vieni jam vienus atliktus darbus skyrė, kiti kitus ir pan. Cantor daug metų dirbo tam painiam klausimui išaiškinti ir įrodė, jog matematikas, geodezas ir inžinierius H e r o n aleksandrietis gyvenęs ir didžius darbus atlikęs antroje II šimtm. (pr. Kr.) pusėje, tuo tarpu kai kiti du to paties vardo (Heron) mokslininkai ir trečias panašaus (Heronas) turį būti priskirti kur kas vėlesniems laikams. Yra nemaža ir kitų painių graikiškosios matematikos klausimų, kuriais Cantor daug pasidarbavo ir kuriems išaiškinti daug svarbios medžiagos surinko.

Daug nuopelnų turi Cantor ir romėnų matematikos istorijai; ypač gražiai patarnavo jis jai savo plačiomis studijomis apie romiškųjų agrimensorių arba gromatikų teoriją ir praktiką, kas jau buvo anksčiau minėta.

Pereidamas į naujesnius, vėlyvesnius laikus, Cantor susidūrė su naujais savotiškais sunkumais, kliudžiusiais jam ramiai dėstyti gausingą medžiagą, jo surinktą iš jau naujesnių ir suprantamesnių raštų. Čia, pav., prasidėjo įvairūs pirmenybių, prioriteto ginčai del asmenų ir ryšy su tuo net tautų rolės atskirų išradimų istorijoje (pav. Gerbert-Boëtius, Torricelli-Roberval, Newton-Leibniz ir kt.). Istorinės medžiagos kiekis be galo padidėjo ir toji medžiaga teko imti dažniausia ne apdirbta, sutvarkyta ir kitų kritiškai vertintą, bet originalė, pradžioje rankraštinė ir tik vėliau — daugiau spaudintinė. Pradėta matematinėje literatūroje vartoti naujosios kalbos, bet tas ne lengvino, greičiau sunkino šaltinių pažinimą, nes nenu-

sistovėjusi moksliškoji tų kalbų terminologija ilgą laiką labai svyravo. Daug ryškių to pavyzdžių pamini Fel. Müller įdomiame straipsny, įdėtame į „Festschrif"*). Iš jo sužinome, kad vokiečių kalboje kai kurie terminai visai iš pagrindų keitėsi po kelioliką ir daugiau kartų. Tuose raštuose istorikui ne kuo lengviau buvo pradžioje orientuotis, kaip senuose chinų, indų ir aigiptiečių raštuose. Ne lengva buvo ir su nenusistovėjusiu simbolų, ženklų, formulų rašymo būdu ir pan.

Pagaliau, naujųjų laikų matematikos istorikui tenka sekti jau ne tiek atskirų matematinių dėsnių kilmę ir autorius, kiek ištisų milžiniškų mokslo disciplinų, kaip pav. begalinių mažybių analizio atsiradimą. Čia dažnai atsitikdavo, kad mokslininkai, juridiškai laikomieji išradėjais, giliau patyrinėjus, pasirodė bebuvę lyg ir labai sumaniais meisteriais, apvainikavusiais darbą, kurį kropščiai dirbo ištisos mokslininkų generacijos. Taip antai, begalinių mažybių analizio kūrėjai, Newton ir Leibniz, studijuodami ankstyvesniųjų matematikų raštus, gavo susidurti juose su idėjomis, atvedusiomis tuodu matematiku į jų nuostabius išradimus, davusius neapmatomų rezultatų. Iliustracijai galime paimti kad ir šį mažą fragmentą iš to išradimo istorijos. Minėtame jubilėjiniame, Cantor'ui skirtame leidiny (Festschrift), žinomas prancūzų matematikas ir istorikas Paul Tannery**) nurodo, jog mėginta manyti, kad jau Descartes, lietėjų metodą taikydamas naudojosi trumpinimų priemonėmis, analogiškomis toms, kurias mums tiekia išvestinių skaičiavimas. Tas yra visai galimas dalykas, nes neminint da ankstyvesnių matematikų (kaip štai pav. Nicolas Orêsme, 1323 — 1382), kurie gvildeno begalinių mažybių analizio klausimus, tenka konstatuoti, jog Descartes mokėjo išspręsti ištisą eilę problemų, kurias vėliau bendresnėmis patobulintomis priemonėmis ėmė spręsti tasai analizis. Šių problemų eilėje buvo, kaip žinome, viena vyriausių ir ankstyviausių vadinamoji atvirkštinė lietėjų problema, vedusi į funkcijų integravimą. Descartes šią problemą aiškiai suprato, jos reikšmę įvertino ir sprendimo kelius nujautė. Pasirodo, kad ir jam šis dalykas paaiškėjo po laiško, jam rašyto 1639 m. mažai žinomo Florimond'o de Beaune, kuris tuo būdu yra taip pat padėjęs

*) Fel. Müller — Zur Terminologie der ältesten mathematischen Schriften in deutscher Sprache, — Festschrift, pusl. 300—330.

**) Pau Tannery — Les „Excerpta" ex M. S. S, R. des Cartes — Festschrift, pusl. 512

bendrai problemai paaiškėti.*) Kur kas toliau už Descartes'ą nužengė begalinių mažybių analizio idėjų sritin beveik kartu su juo dirbę F e r m a t ir R o b e r v a l ir tuo būdu Newton'o ir Leibniz'o kelias buvo labai palengvintas.

Visus tokius klausimus išaiškinti buvo labai nelengva. Vienus jų didysis Cantor'o veikalas visai gražiai išsprendė, kitų išaiškinimui jis patiekė tiek medžiagos, kiek nei vienas ankstyvesniųjų nei vėlesniųjų veikalų nėra padaręs. Daugeliu klausimų galutinis sprendimas nepadarytas, bet ir negalima buvo jo reikalauti, nes visa reikiama medžiaga da nėra surinkta ir ištirta. Paimsime pavyzdžiui kad ir arabų gadynę: ji nėra detališkai išaiškinta, nes dar tūkstančiai, gal dešimtys tūkstančių arabiškų rankraščių laukia pietinės ir vakarinės Europos knygynuose, muzėjuose ir privatinėse kolekcijose tyrinėtojų, kurie ne tik daug ką išaiškins apie arabų matematiką, bet tuomi geriau apšvies ir be galo įdomų ir vaisingą klasikinį matematikos periodą. Cantor'o veikalas davė mokslui tiek, kiek galima buvo anais laikais duoti. Daug matematikos istorijos dalykų paaiškėjo jau po to, kai Cantoro darbas išėjo į platųjį pasaulį. Daug dalykų tik ateity paaiškės, — tada atsiras ir galimumų geresniems, tobulesniems už kantoriškį veikalams pasirodyti, nes nei vienas mokslas nestovi vietoje. Jei apie astronomiją nesenai manyta, kad ji esanti užbaigtas mokslas, tai dabar pasirodė ir ji bestovinti prieš ištisą eilę naujų neišspręstų problemų, kurios kažin ar kada bus išspręstos ne tiktai del to, kad mūsų dabar vartojamosios priemonės yra kaip ir prisiartinusios tobulumo ribai, bet ir deliai to, svarbiausia, kad pačios pagrindinės laiko ir erdvės sąvokos, kurios mums iki nesenų laikų rodėsi aiškios ir neginčytinos, sukėlė daug abejonių ir neaiškumų, pareikalavusių revizuoti daugelį mūsų teorijų. Kur kas tolesnis yra nuo tobulumo ir astronomiško tikslumo toks mokslas, kaip bendrai istorija ir konkrečiai — matematikos istorija: jai gerėti ir aiškėti yra dar labai plati dirva.

Tokiose apystovose teko Cantor'ui atlikti didysis ir svarbusis jo darbas. Ilgus dešimtmečius intensingai ir sąžiningai dirbęs jis, leisdamas 1898 metais pasaulin savo veikalo III tomą, linkėjo, kad atsirastų žmogus, kuris pasiimtų toliau tęsti jo gyvenimo darbą. Tas jo noras įsikūnijo tik dalinai, nes jau IV tomas, kaip minėjome, išėjo kolektyviškas: jį pagamino keletas įvairių kraštų mokslininkų, susibūrusių Cantor'o didelį darbą tęsti. Reikia pripažinti,

*) M. C a n t o r, II, pusl. 856—857.

jog nežiūrint to, kad bendradarbiai buvo rimti ir kompetentingi žmonės, vis gi kiekvienas jų tepajėgė parašyti atskiros mokslo šakos trumpo periodo istorija: ištisos naujųjų laikų istorijos, tiek plačiai paimtos, kaip Cantor'o rašyta, niekas jų neišdrįso imtis. Tiesa, paskutiniausių laikų, siekiančių mūsų gyvenamąjį momentą, matematikos istorija ir negali būti parašyta, nes mokslas toliau auga, plečiasi, gilėja . Ją turi atstoti moderninės matematikos enciklopedija, kaip teisingai pastebi M e y e r*), kurioje patys tos matematikos kūrėjai galėtų tarti savo betarpį žodį pasauliui apie jų mokslą.

Cantor'o veikalui charakteringa ir tai, kad jis nesitenkino vien matematinius faktus rinkdamas ir aiškindamas. Jis stengėsi juos rišti su tos arba kitos tautos ir gadynės gyvenimo sąlygomis ir kultūra. Tas ne kartą vertė Cantor'ą šiek tiek nukrypti nuo grynai matematinių temų į bendresnės istorijos sritį, bet tas tik geriau nušviesdavo dirvą, kurioje augo matematika ir labiau akcentavo svarbų to mokslo vaidmenį bendroje žmonijos kultūros istorijoje.

Išleidęs pasaulin (1898 m.) savo veikalo III tomą, Cantor dar 20 metų dirbo matematikos istorijos srity, rašė straipsnius atskirais klausimais, tikrino ir taisė savo veikalo abejotinas vietas ir kritikos iškeltasias klaidas. Tačiau buvo pagrindo bijoti, kad jo darbas didesnių vaisių jau neatneš. Jis matomai pats tą jautė, todel neilgai trukus atsisakė toliau vesti *„Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik"*. Žurnalo *„Zeitschrift für Mathematik und Physik"* vadovybė, XLV tome (1900) pranešdama skaitytojams apie Cantor'o pasitraukimą iš redakcijos, gailisi, kad pasišalina iš žurnalo vadovybės dirbęs 42 metus aktingas bendradarbis ir reiškia įsitikinimo, kad ir gausingi Cantor'o gerbėjai tokiu pačiu jausmu sutiks šią žinią.

Matyti Cantor'ą vertė trauktis nuo plataus tolesnio veikimo ir prasidėję spaudoje puolimai. Jau tuojau po jubiliejinių iškilmių pasigirdo spaudoje ir kritikos balsų del „Vorlesungen" M. Simon, pripažinęs Cantoro darbą svarbiausiu tos mokslo srities veikalu ir daug juo naudojęsis, vis delto pastebėjo jame ir netikslumų. Vieną antrą esminį trukumą nurodė ir P. T a n n e r y**), tačiau jis labai

*) W. Fr. M e y e r — Ueber die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. — Festschrift, pusl. 295.

**) P a u l T a n n e r y — Notes sur la Pseudo-Géométrie de Boèce — "Bibl. M—ca", t. I, pusl. 39—50.

korektingai pastebėjo, jog kas liečia Cantor'o asmeninius tyrinėjimus keliamuoju klausimu (apie Boetijaus geometrijos autentiškumą), tai dalykas yra tvarkoje, bet jį suklaidinę kiti (Blume ir Lachmann). Nuo to istorikui, žinoma, ne visuomet galima apsisaugoti.

Labai gausingą kritiką pabėrė žurnale *„Bibliotheca Mathematica"* jos leidėjas G. Eneström. Jau programiniame straipsny*) jis pažadėjo, kiekviename žurnalo tome skirti vieną skyrių trumpoms pastaboms apie „Vorlesungen". Tą savo pažadą leidėjas ištesėjo su kaupu, nes pavesdavo tokioms trumpoms pastaboms ir pataisoms ir po du skyriu greta eilės straipsnių, kuriuose buvo smulkiai nagrinėjamas visas Cantor'o veikalas arba atskiros jo dalys. Tame pačiame I tome (pusl. 276) recenzuodamas II-jo tomo naują laidą, Eneström konstatuoja, jog nuo I laidos momento atsirado tokia gausinga literatura ir tiek padaryta pastabų, kad pritikę ir visai perdirbti veikalą. Recenzentas gailisi, kad tas neįvyko ir paaiškina tai tuo, kad darbas būtų buvęs tikrai labai sunkus ir, žinoma, būtų ilgam sutrukdęs naują laidą. Jis nurodė tarp ko kita daug netikslumų bibliografinėje veikalo daly ir aiškino juos tuo, kad Cantor nebuvo bibliografas. Rodos daug kas galima buvo paaiškinti ir tuo, kad mokslininkas jau ėjo aštuntą dešimtį savo amžiaus metų.

Po pirmųjų smulkesnių pastabų, Eneström savo leidinio II tome**) jau kelia aikšten pagrindinę mintį, kad iktolinis daugiau literatūriškas matematikos istorijos rašymas neturėtų būti pavyzdžiu ateičiai ir, būdamas tik laikiniu reiškiniu, turėtų kiek galima greičiau užleisti vietą kitokiam, moksliškesniam rašymui. kuris tikrai sudarytų iš matematikos istorijos atskirą savaimingą mokslo discipliną. Cantor'ui jis prikiša***), kad, surinkęs nepaprastai daug medžiagos apie 1727—1758 m. matematiką, negana ją sutvarkė, nevisuomet teisingai orientavosi gausingoje ano periodo matematinėje literatūroje ir, leisdamas antrą laidą, — ne visa priėmė domėn, kas buvo kritikos iškelta aikšten nuo pirmos laidos laikų. Eneström nuomone geriau būtų buvę, jeigu Cantor vietoje III tomo būtų iš-

*) G. Eneström — Ziele und Aufgaben eines Organs für mathematisch-historische Forschung und für aktuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften — „Bibl. M—ca, I t., pusl. 6.

**) G. Eneström — Ueber die litteratische und wissenschaftliche Geschichtschreibung auf dem Gebiete der Mathematik, „Bibl. M—ca, II t., 1901 n. pusl. 3.

***) G. Eneström — op. cit. pusl. 447.

leidęs veikalą pav. — pavadinimu: „Medžiaga 1727 — 1758 m. matematikos istorijai".

Bekritikuodamas Cantor'o raštus ir taisydamas užtiktas paklaidas E n e s t r ö m iškėlė eilę rimtesnio pobūdžio priekaištų didžiajam istoriografui. Taip antai, prikaišiojo Cantor'ui, kad jis dažnai nesistengiąs pažinti mat-kos praeities faktų iš pirmųjų šaltinių, o pasigaunąs kitų aiškinimų. Atsiminus tai, kas aukščiau pasakyta apie pirmųjų (originališkų) šaltinių naudojimo sunkumus ir kartais net abejotiną naudingumą, tenka pasakyti, kad šiaip atrodąs rimtas priekaištas, nevisuomet turėtų būti taikomas Cantor'ui, kuris plačiai naudojosi ir pirmiausiais šaltiniais. Vėliau Eneström*) pripažįsta, kad autoriams, kurie neturi tvirtų pagrindinių istorinių žinių ir įpratimų, yra patartina vengti naudotis pirmaisiais šaltiniais, ir to vietoje esą geriau yra naudotis ištirta, specialistų pripažinta medžiaga. Žinome, kad Cantorui rašant matematikos istoriją, tos ištirtos medžiagos buvo labai maža ir, antra vertus, negalima buvo reikalauti, kad jis būtų buvęs specialistas senovės chiniškiems, indiškiems, babiloniškiems, aigiptiškiems, o vėliau arabiškiems ir kitiems raštams skaityti, atsieit, naudotis pirmaisiais šaltiniais.

Kad ne visi priekaištai, kurie buvo žurnale „Bibl. M-ca" daromi Cantorui, buvo gana pamatuoti, galima spręsti kad ir iš šio pavyzdžio. Eneström**), rašydamas apie pirmenybių ginčą del begalinių mažybių analizio sukūrimo, sako: „P. Cantor čia cituoja šią vietą iš Leibnico laiško Wolf'ui, rašyto 1716 m. pradžioje: *„cum Barrovianas lectiones vidi (anno Domini 1675 quantum recordor)"*. Bet kaip maža vertės turinti ši Leibniz'o žinutė, esą galima matyti iš rašyto į Conti, 1716 m. balandžio m. 9 dieną laiško, kuriame Leibniz pastebi: *„moy qui (autant que je puis m'en souvenir) n'ay veu les livres de M. Barrow qu'a mon second voyage d'Angletérre* (taigi tik 1676 m. spalių mėn.) *et ne les ay jamais lûs avec attention"*. Cantor turėjo pilną teisę paklausti kritiko, kodel gi turi būti tikresnis Leibniz'o rašytas tais pačiais metais a n t r a s laiškas apie buvusius prieš 40 metų nuotikius, ypač kai, paaštrėjus prioriteto ginčui, Leibniz galėjo būti suinteresuotas

*) G. E n e s t r ö m — Ueber die Bedeutung von Quellenstudien — „Bibl. Math.", XII t., 1912, pusl. 11.

**) G. E n e s t r ö m — „Kleine Mitteilungen", „Bibl. Math.", XII t., 1912 m. pusl. 63.

neigti faktus, kuriuos pirmame, gal daugiau konfidencialiame laiške teisingiau nušvietė?

Enestrom prikiša Cantor'ui nenuosakumą nuomonėse apie rankraštinių šaltinių įvertinimą*): tai jis juos naudojąs priskirdamas tam laikatarpiui, kada jie buvo parašyti, tai vėl sakydamas (IV t. 1079 pusl.), kad rankraščiai tik tuomet yra imtini istorijai, kai jie buvo išspaudinti, vadinasi, spaudinimo momentas reikią laikyti jų gimimo diena. Enestrom čia teisingai pastebi, jog toks principas gali vesti į prieštaravimus ir net nesąmones, kada pav. kalbama apie senovės ir vidurinių amžių matematiką. Baigdamas straipsnį Enestrom tvirtina, jog net žodžiu paduodamieji šaltiniai gali kartais būti imtini domėn ir paremia tą tvirtinimą pavyzdžiu: apie Weierstrass'o funkcijų teorijos naują pamatavimą sužinota tik žodžiu iš jo mokinių.

Griežti kritikai ėmė kelti aikštėn ir tai, kad Cantor nevisuomet kritiškai įvertino naudojamus šaltinius ir todel kartais darė skubotus ir nevisai pamatuotus išvadus. Taip antai M. Simon**) prikiša Cantor'ui (kartu ir aigiptologui Rich. Lepsius'ui) klaidingą tvirtinimą, būk aigiptiečiai ėmę trikampius ir trapecijas tik lygiašonius ir kad trikampio plotas buvęs lyginamas pusei sandaugos pagrindinės su šonine kraštine, o trapecijos plotas — pusei sandaugos vidurinės linijos su kraštine, vietoje su aukštine, ir kad aigiptiečiai darę tokias stambias klaidas iki Kristaus laikų, vadinasi, dar ir šimtmečius vėliau po Euklido. Cantor neturėjęs tos klaidos seniokišku užsispyrimu naujoje laidoje kartoti, nes Revillout ir nepriklausomai nuo jo Borchardt jau įrodę, kad paimtieji trikampiai ir trapecijos buvę tik labai netobuliai ranka išbriežti, kaip pav. kitoje rankraščio vietoje apskritimas išbriežtas panašus į netobulą aštuoniakampį, ir trikampiai galį būti laikomi ir lygiašoniais ir stačiakampiais. Tiesa, ir M. Simon pripažįsta, kad Cantor ne iš piršto yra tą tvirtinimą išlaužęs, bet kad jis rėmęsis Edfu bažnyčios dovanojamaisiais aktais. Tačiau kritikas nurodo, jog po *Vorlesungen* pirmos laidos tolesni Edfu dokumentų tyrinėjimai įrodę, jog Cantor ir Lepsius sudarę formulas, kuriomis išskaičiuotieji rezultatai gaunami ne toki, kaip dokumentuose kad yra. M. Simon

*) G. Enestrom — Ueber die Bedeutung von Quellenstudien, „Bibl Math.", XII t., 1912 m., pusl. 1—20.

**) M. Simon — op. cit., pusl. 45.

tvirtina, kad rezultatai turėję būti gauti artutinio kvadratinių šaknių skaičiavimo būdu panašiu į tą, kuriuo kai kurie matininkai ir dabar vartoją artutinėms kvadr. šaknims gauti artutine formula $\sqrt{a^2+\varepsilon}=a+\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{a}$. Šį tvirtinimą Simon*) paremia ne tik jo atliktais skaičiavimais, bet ir tiesioginiais įrodymais: Griffith'o paskelbtame 1897 m. matematiniame Kahuno rankrašty yra pirmas kvadratinių lygčių pavyzdys.

Toliau kalbėdamas apie Vorlesungen aigiptiškos matematikos skyrių M. Simon nurodo, jog Cantor ir Eisenlohr nepastebėję to, kad kai kurie neaiškūs rankraščio terminai reiškią santykius, tinkančius tam tikriems kampams, tad aigiptiečiai turėję supratimo apie proporcingumą, panašumą ir apie kai kuriuos trigonometrijos dalykus; kad jie, paėmę ant bažnyčių sienų kvadratų tinklus, braižę juose, kaip mes dabar milimetriniame popieriuje, panašias figuras, o Fayum bažnyčioje rasta tikrų meno kūrinių, kuriuose ir perspektyva išlaikyta (tiesa, tai buvę padaryta jau vėlesniais laikais, apie 150 m. prieš Kr.). Bet ir pats kritikas M. Simon kritikavo Cantor'o veikalus matomai nevisuomet gerai įsiskaitęs į juos. Štai pav. Simon kaltina Cantor'ą, kam jis klaidingai laikąs Ahmes'o rankraštį rankvedžiu, kai šis turėjęs būti mokinio sąsiuviniu; tuo tarpu Cantor vienoje vietoje**) aiškiai sako: „ar laikyti sakomą rankraštį rankvedžiu ar mokinio sąsiuviniu, bus tas pats atžvilgiu naudos, kurią jis mums atneša".

Ikišiol minėjome daugiausia pavienias veikalo spragas, kurių jame yra nemaža ir kurių matematikos istorija tais laikais kartais ir negalėjo išvengti. Eneström, keliolika iš eilės metų pats kritikuodamas Cantor'o veikalą ir kritikos raštus redaguodamas savo žurnale, iškėlė ir daugiau pagrindinės reikšmės trukumų. Nagrinėdamas klausimą apie naudotinus matematikos istorijai šaltinius***), jis atsakymą laiko priklausomu nuo to, ar žiūrėti į matematikos istoriją kaip į išradimų atpasakojimą, ar kaip į matematikos evoliucijos istoriją. Pirmuoju atveju gali būti panaudota visokia patikimoji medžiaga (spaustinė, rankraštinė ir kit.); antruoju atveju — turi būti parinkta tik tas, kas tikrai paveikė matematikos augimą. Išeidamas

*) M. Simon — op. cit. pusl. 40.

**) Cantor, I, pusl. 53.

***) G. Eneström — Ueber die Bedeutung von Quellenstudien... „Bibl. Math—ca" XII t., 1912, pusl. 1—20.

iš to kriterijaus, Eneström kvalifikuoja Cantor'o veikalą kaip išradimų atpasakojimą. Ši charakteristika dalinai yra pamatuota, bet kila ir kitas klausimas ar matematikos istorijoje yra galima abstrahuotis nuo individinės kūrybos ir pasinerti vien abstrakcinių idėjų srity? Manome, kad tas yra negalima ir nebūtų naudinga, nes žmogaus moksliškoji kūryba dažniausia esti labai susijusi su jo asmenybe, jo idėjų atsiradimas ir pobūdis labai pareina nuo jo asmeninių privalumų, gyvenimo apystovų ir kit. Imdami tik tuos mokslininko kūrybos rezultatus, kurie turėjo ryšio su ankstyvesniąja mokslo stadija ir savo keliu paveikė tolesnį idėjų augimą, kartais galėtume nepastebėti tikrųjų priežasčių ir akstinų. Teisingos yra šia prasme, taikomos ir matematikos istorijai pastabos, kurias jau kartą mūsų paminėtas naujosios filosofijos istorijos autorius*) šiaip formuluoja, kalbėdamas (pusl. 5) apie ryšį tarp logiškųjų idėjų ir mintijančio individo: „Tarp logiškos idėjos ir filosofuojančio individo tarpininkauja eilė einančių laipsniais ir susikryžiavusių įvairių bendrųjų galybių: tautos, gadynės, užsiėmimo, amžiaus dvasios. Jos pavienio dvasinio individo yra jaučiamos kaip ir paties savęs dalis ir joms jis yra nesąmoningai klusnus".

Eneström ne kartą prikaišiojo Cantorui tai, kad jis, priėmęs domėn daugelį nurodytų smulkių trūkumų ir atataisęs daug jų naujose laidose, ištisą jų eilę praleidęs nereaguodamas ar tai iš viso jų nepastebėjęs, ar del kitų nesuprantamų kritikui priežasčių.

Kaip ir pasiaiškindamas del tų rimtų priekaištų Cantor pasisako**): „Kas kartą stengiausi įkainoti išdavas, kurių davė arba dėjosi davę vis daugėją istorinės dirvos arėjai. Kas kartą reiškiu ir įsitikinimą, jog toji dirva da ilgai nebus išnaudota ir visuomet liks atvirų klausimų, kuriems atsakymai galės būti nevienodi".

Nuolatos kritikuodamas Cantor'o veikalą Eneström pagalios***) pats pripažįsta, jog jo žurnale dažnai prašoksta polemiškas tonas, bet jis kaltina tuo patį Cantorą, kuris savo replikose nešykštaująs nerimtų polemiškų žodžių, o pačiame veikale dažnai neišlaikąs moksliško rimtumo ir šaltumo: taip antai, vieną *Commercium epis-*

*) Prof. Richard Falkenberg — Geschichte der neueren Philosophie — Leipzig, 1908, pusl. XII + 654.

**) M. Cantor, III t., prakalbos pusl. III.

***) G. Eneström — Wie kann die weitere Verbreitung unzuverlässiger mathematisch—historischen Angaben verhindert werden?" „Bibl. M—ca" XII t., 1912 m., pusl. 1—13.

tolicum)* leidėjo netikslumą, kilusį matomai iš dviejų panašių dokumentų supainiojimo, vadina „freche Lüge"; W a l l i s'o *Algebros* istorinę dalį traktuoja šiaip: „es ist überhaupt kein historischer Theil, sondern ein von englischen übermässigen Nationalstolze beeinflusse Parteischrift". Gal tuo polemišku Eneström'o ūpu paaiškinamas ir labai skaudus, negana pamatuotas arba bent neatsižvelgiąs į Cantor'o darbo apystovas tvirtinimas**) esą jam, Eneström'ui, pavykę konstatuoti, kad p r i p u o l a m o s Cantor'o paklaidos pasirodžiusios esančios s i s t e m i n g o m i s ir jis tariasi suradęs to priežastį: esą Cantor'o matematiškai - istorinės žinios buvusios per daug paviršutiniškos ir su spragomis. Be to ir Cantor'o darbo metodas buvęs netobulas, nors to jis nepamatuoja aiškiais pavyzdžiais.

Nebodamas šios skaudžios ir piktos, bet dažnai nepelnytos kritikos, Cantor iki gyvenimo pabaigos nenuleisdamas rankų dirbo, tyrinėjo atskirus matematikos istorijos klausimus ir dėjo didesnius ir mažesnius straipsnius įvairiuose moksliškuose žurnaluose, net toje pačioje „Bibliotheca Mathematica", kurios leidėjas Eneström taip piktai plakė senyvą mokslininką.

Neminėdami įvairių recenzijų apie kitų autorių raštus, paminėsime iš vėlesniųjų gyvenimo laikų (po 70 metinio jubiliejaus) šiuos didesnius ir mažesnius straipsnius: *„Nicolaus Copernicus"* (Neue Heidelberger Jahrb. — 1900); *„Karl Friedrich Gauss"* (ibid) *„Nachruf an Oscar Schlömilch"* (Bibl. Math-ca 1900), *„Beiträge zur Lebensgeschichte von Carl Friedrich Gauss* (referatas, skaitytas tarptautiniame kongrese — Congrès International d'histoire des Sciences à Paris — 1900), *Sus l'Historiographie des mathématiques* — referatas, skaitytas II tarptaut. matematikų kongrese; *„Origines du calcul infinitésimal* (Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, III sect. — Logique et histoire des Sciences. Paris, 1901), *La Biographie de Schlömilch* (L'Ensseignement mathématique, 1901), *Der Erfinder des Wilsonschen Satzes* (trumpas žinių palyginimas, — Bibl. Math-ca, 1902) *Wie sollman die Geschichte der Mathematik behandeln?* (Bibl. Math. — 1903), *Hieronymus Cardanus, — ein wissenschafliches Lebens-*

---

*) Polemiškoji angliška knygelė, išleistoji 1713 m. tikslu įrodyti, kad I. Newton buvo begalinių mažybių analizio išradėjas, o kad Leibniz neteisėtai savinosi to išradimo garbę.

**) G. E n e s t r ö m — tik ką cituotas str., pusl. 79.

bild aus dem 16. Jahrhundert (prof. G. Loria perskaitytas kongrese: Congresso Internazionale di storia delle scienze matematiche e fisiche in Roma — 1903), *Ferdinand Schweins und Otto Hesse* („Die Heidelberger Professoren aus dem 19. Jahrt"), *Maximilian Curtze* (Jahresberichte der Deutschen mathem. Verein., XII), *Ueber einen 4 Band von Contors Verlesungen über Geschichte der Mathematik* (Jahresbericht der Deutsch. math. Verein., XIII. 15 d.) *Ueber die älteste indische Mathematik* (Archiv der Mathematik 1904), *Babylonische Quadratwurzeln und Kubikwurzeln* (Zeitschrift für Assyrologie, 1908); *Carl Wilhelm Feuerbach* (Sitzungsberichte der Bayrischen Akad. d. Wiss-ften, 1910). ir kt.

Nežiūrint didelio vardo, kurį Cantor užsipelnė savo pagrindiniu veikalu, ir nepaisant aktingo jo dalyvavimo matematinėje istorinėje literatūroje, suvažiavimuose, kongresuose, jo garsas ėmė mažėti. Neabejojamai prisidėjo prie to minėtoji pikta kritika, bet ir šiaip susidarė įspūdžio, kad senas mokslininkas pergyveno savo garbę. Antrame tarptautiniame matematikų kongrese Paryžiuje (1900), nežiūrint to, kad jis skaitė referatą *„Sur l'Historiographie des mathématiques"*, V sekcijos (bibliografijos ir istorijos sekcijos) pirmininku figuravo princas Roland B o n a p a r t e, bet ne M. Cantor, kuriam teko pirmininkauti ne tiek tinkamoje jam VI-je sekcijoje (matematikos dėstymo ir metodų sekc.). III tarptautinio mat. kongreso (1904 m. Heidelberge) istorijos sekcijoje Cantor vėl skaitė įvedamąjį referatą.

Paskutiniais gyvenimo metais Cantor buvo gerokai užmirštas. Gal čia prisidėjo audringi karo laikai ir visokeriopi sunkumai, kuriuos teko Vokietijai pergyventi karui praūžus, bet jo pasekoms tebeslėgiant kraštą. Šiaip ar taip, M. Cantoro mirtis, ištikusi 1920 m. balandžio mėn. 9 dieną, liko vos pažymėta trumpomis žinutėmis įvairiuose laiškuose. Ir net tas matematinis žurnalas (Zeitschrift für Mathematik u. Physik), kuriame jis pusiašimtį metų bendradarbiavo ir 42 metus buvo vienu jo istorinio skyriaus redaktorių, pasitenkino trumpa žinute apie mirtį.

Visa tai rodė, kad nuo to laiko, kada Cantor rašė savo fundamentinį veikalą, mokslo reikalavimai statomieji matematikos istorijai padidėjo, ir Cantor jau negalėjo jų patenkinti. Vis delto mums rodosi, kad toks mokslininko užmiršimas buvo neteisingas. Pasistengsime kiek plačiau paremti šią mintį.

III. M. Cantor'o reikšmė matematikos istoriografijai.

Sekdami pavienio individo psichikos augimą, pastebime charakteringą jai bruožą: ji pradžioje veržiasi pažinti ir surinkti kuo daugiausia faktų, atskirų idėjų, sąvokų ir tik po kurio laiko pajunta reikalo visa tai pasverti, palyginti, viena su kitu suderinti, išanalizuoti ir tuo būdu siekti pilnutinio pažinimo. Panašiai dedasi ir su mokslais. Pradžioje naujas mokslas paprastai stengiasi kuo daugiausia išsiplėsti, kiek galima daugiau surinkti faktų, kuriuos jis gali paaiškinti. Tik po kurio laiko atsiranda galimumų ir reikalo nuodugniai ištirti pačias dalyko šaknis, jų pobūdį, tvirtumą.

Taip atsitiko ir su matematikos istorija. Po nedaugelio matematikų, kurie ryžosi rašyti istorinius matematinius raštus, Cantor pirmas parašė didžiausį sistemingą matematikos istorijos veikalą ir iškėlė ją į savaimingą mokslo discipliną, kuriai universitetai ėmė skirti paskaitas, kurti katedras, organizuoti reikiamas studijas ir tt. Šis jaunas mokslas ir jau nejaunas jo kūrėjas pradžioje veržėsi surinkti ir iškelti viešumon kuo daugiausia matematikos praeities faktų, sudominti jais mokslininkus bei matematikos aspirantus, tad negalėjo kartu su tuo, o pradžioje gal net nejautė būtino reikalo, kiekvieną faktelį ir dokumentą visapusiškai ištirti. Jo uždavinys buvo kuo pilniausiai surinkti iš visur ir kiek galima sutvarkyti gausingą istorinę medžiagą, kad vėlesnieji tyrinėtojai lengvai galėtų papildyti trūkstamą ir ištirti esamą. Tą darbą Cantor atliko taip, kaip nei vienas žmogus anksčiau ir nei vienas vėliau nėra atlikęs.

Cantor'ui reikia pripažinti ir tas didelis nuopelnas, kad jis sužadino jaunesniuose mokslininkuose pasirįžimą darbuotis naujoje mokslo šakoje. Jo mokiniai ir šiaip sekėjai, pradžioje paėmę pagrindan jo veikalą, ėmė rašyti matematikos istorijos vadovėlius ir atskirų mokslo šakų istorijas. Tuo būdu, kaip patys autoriai pasisako, išaugo pav. veikalai Tropfke*), Sigm. Günther'o**) ir kai kurių kitų autorių darbai. Kiti jaunesniųjų mokslininkų ėmėsi tyrinėjimų atskirais klausimais, kad papildyti kai kurias Cantor'o

*) Joh. Tropfke — Die Geschichte der Elementarmathematik, 7 tomeliai, Leipzig, 1902 ir vėliau.

**) Sigm. Günther — Geschichte der Mathematik, Leipzig, 1908, pusl. 427.

veikalo dalis ir užtaisyti pasireiškusias spragas. Nusimaną matematikos istorijos dalykuose mokslininkai rašė apie Cantor'o veikalą ir jo naujas laidas kritiką, recenzijas, pastabas ir tas ne kartą išaiškino kai kuriuos klausimus geriau ir pilniau, nei kaip tas buvo pačiame veikale atlikta, tad kartu su juo sudarė svarbią mokslišką visumą. Ta prasme pasiteisino E n e s t r ö m'o išreikštoji viename jo straipsny*) mintis, jog studijuojant matematikos istoriją kartais net ir neteisingos, vėliau nugriautos nuomonės yra vertos to, kad būtų pažymėtos, nes jos sudaro pradžią naujoms teorijoms. Kitoje vietoje tas pat autorius**) pripažįsta, jog istorijos visai negalima būtų dėstyti, jeigu būtų iš jos reikalaujama, kad jos turinys būtų visiems laikomas visiškai teisingas; tas ypač tinka matematikos istorijai, nes tikslūs tyrinėjimai joje yra visai nesenai prasidėję. Vadinasi, pats griežčiausias Cantor'o kritikas šiuo savo pasakymu anuliavo daug priekaištų, jo darytų garsiajam istorikui.

Matome, kad tuo būdu aplink Cantor'o veikalą ir del jo susikūrė gyvas matematiškai - istorinis darbas, kurio išdavas yra įdomi ir gausinga moksliškoji literatūra. Tas yra labai naturalu. Pradėdamas leisti minėtą svarbų matematikos istorijai žurnalą („Bibliotheca Mathematica") E n e s t r ö m programiniam straipsny***) teisingai sako: „kai tik kuri mokslo šaka ima plėstis, šakotis, atsiranda reikalo leisti specialį jos reikalams žurnalą. Ypač būtina tai padaryti atžvilgiu istorinių matematikos studijų, susiduriančių ir su matematika, ir su literatūros istorija ir su filosofija". Kad ir jo sumanymas leisti žurnalą rišosi su Cantor'o darbu, aišku iš tolesnių jo žodžių, kuriuos randame tame pačiame straipsny: „Esą gali kilti abejonių, ar išėjus Cantor'o veikalui belieka kas nauja pasakyti. Tačiau kaip tik šis veikalas sužadina tirinėtojui ištisą eilę klausimų, ragina tirti naujus periodus (pav. periodą nuo 1758 m.)". Tuo būdu Enestrom, griežtai mažindamas Cantor'o nuopelnus, nei nepasijuto prisipažinęs, kad ir jo paties gyva ir vaisinga darbuotė matematikos istorijoje buvo Cantor'o sužadinta.

---

*) G. E n e s t r ö m — Ueber die planmässige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete — „Bibl. M—ca", VIII t., 1907, pusl. 8.

**) G. E n e s t r ö m — Die mathematisch-historische Schulunterricht — „Bibl. M—ca", XIV t., 1914 m., pusl. 4.

***) G. E n e s t r ö m — jau cituotas str. Ziele u. Aufgaben eines Organs.... I. t., pusl. 1.

M. Simon, taip pat mokėjęs gana aštriai pakritikuoti kai kurias Cantor'o nuomones ir raštus, vis delto rašė 1909 m. savo įdomaus veikalo *) įžangoje: „Standartinis šio amžiaus veikalas yra Cantor'o „Vorlesungen"... Greitai sekdamos viena po kitos laidos labai vaizdžiai rodo, kaip sutvirtėjęs yra matematikuose susidomėjimas jos istorija. Cantor'o veikalas yra nuostabus reiškinys ir liks tokiu, jei net ir atsitiktų su juo taip, kaip su jo pirmtakūnu Montucla. Išplaukią iš šio pavieni tyrinėjimai daug ką pataisys. Indų, aigiptiečių, babiloniečių ir graikų matematikos istorijoje toks naudingas kurimo darbas jau smarkiai eina pirmyn". Kad tai nėra ūpo pagautas pasisakymas, bet kritiškai žiūrinčio į dalyką žmogaus nuomonė, patvirtina tolesni jo žodžiai**): „... Del kai kurių mano pastabų (apie M. Cantor'ą) turiu pasisakyti, jog aš esu sužavėtas beveik viršžmonišku Cantor'o darbu ir jo vaisiais,... bet aš niekam neleisiu, kad išplėštų man teisę kritikuoti bet ką".

Kaip jau matėme, greta karštų Cantor'o garbintojų, nestigo ir aštrių kritikų, nurodžiusių ištisą eilę silpnesnių vietų didingame Cantor'o veikale. Bet kuriame darbe negali būti trūkumų? Net ir einant gerokai pramintais takais galima suklysti; juo labiau tas galėjo atsitikti su Cantor'u, kuris dažniausiai gavo ieškotis naujų kelių neištirtoje srity. Jam ne tiktai reikėjo naujesniųjų laikų leidinius daugumoje pačiam skaityti, bet ir daug senų veikalų matyt teko tyrinėti iš originalų, o tam reikėjo specialinių kalbos ir literatūros žinių, kurių negalima visa pilnuma reikalauti iš matematikos istoriko. Bet ir naujesniųjų laikų gausinga istorinė medžiaga stato ir statys istorikui vis naujas ir naujas problemas, kurios galės būti negreitai išspręstos arba ir visai nebus išspręstos. Jau vien matematikos istorijos periodų nustatymas yra rimta jos problema, apie kurią Enestrөm rašo***), jog galima panaudoti daugelį lygiai netikusių suskirstymų: šimtmečiais, dideliais politiniais įvykiais, ir t. t. Gal geriau būtų suskirstyti didelių matematikų pasirodymais, bet ir tai sudarytų daug sunkumų. Da sunkiau bus tai padaryti, jei bus norima neatskirti vieno nuo kito tų tyrinėjimų, kurie vienas su kitu yra surišti. Tenka dairytis tokių kelio ženklų,

*) M. Simon — op. cit.

**) M. Simon — op. cit. pusl. 140.

***) G. Enestrөm — Ueber Periodenenteilung in der Geshichte der Mathematik" — „Bibl. Math.", III t., 1902, pusl. 6.

kurie reiškia užbaigtą ir suvestą išeitąjį periodą arba rodo naujo pradžią, o tuo tarpu kyla bendras klausimas, ar beegzistuoja bendrai toki ženklai ir keliarodžiai, ar egzistuoja kaž koki periodai ir tt. Susidarius tais klausimais tą arba kitą nuomonę ir pradėjus jąja vadovautis darbą tvarkant, atsiranda naujų faktų ir davinių, kurie griauna jau padarytuosius išvadus; vėliau atsiranda da naujesnės medžiagos, kuri ir juos savo keliu griauna ir tt. Vadinasi, istorinių, ypač palyginti jaunų matematinių istorinių studijų srity istoriko darbas prilygsta Sizifo darbui.

Tačiau taip nėra. Kiekvienos senos teorijos sugriovimas ir jos vietoj naujos, ir ne visai da tobulios kūrimas jau yra žingsnis pirmyn, naujas etapas begaliniame kely į tobulybę, kad kartais gal ir rodytųsi, būk žengiama net atgal.

H. Spencer*) formuluoja tris bendrus pažinimo ir bet kokio reiškinio išsivystymo etapus: 1° pradžioje vyksta koncentracija arba integracija reikiamos procesui medžiagos, kuri iki tol buvo išsklaidyta, išberta aplinkumoje; 2° toliau eina diferenciacija, kai sukauptoji reiškinio medžiaga nuo paprasto gemalo ima diferenciuotis, formuoti atatinkamus vienetus (sąvokas, teorijas, organizmus); pagaliau, 3° aiškumo, tobulumo didėjimas.

Su tokia formula priėję prie matematikos istorijos, turėsime pripažinti, jog Cantor sudarė ir gal užbaigė joje medžiagos integravimo etapą ir paruošė dirvą sekamam etapui — istorinės medžiagos diferenciacijai, vadinasi, sukūrė galimumus tam mokslui siekti tobulumo. Jei Cantor daugiau jokių nuopelnų neturėtų, vis tiek lieka jo atliktas nepaprastai svarbus matematikos istorijai darbas.

Kaip pats Cantor žiūrėjo į savo darbus?

Straipsny: *„Wie soll man die Geschichte der Mathematik behandeln"***)* Cantor rašo: „Šio žurnalo leidėjas (G. Enestrom) ne kartą kėlė klausimą, kaip turi būti rašoma matematikos istorija ir kiek polemišku būdu tvirtino, kad iki šiol dar nėsą tobuliai parašytos istorijos. Su tuo Cantor sutinkąs ir toliau rašo: „Kas liečia manus darbus, tai esu visai įsitikinęs, jog jie vaizduoja tiktai tą, kas pasiekta, o tai yra dar toli nuo to, ko siekta, net ir turėjo toli likti,

*) Г. Гефдингъ — Исторія новѣйшей философіи — пер. съ нѣм. СПБ. 1900 m., pusl. 496.

**) „Bibl. Math.", IV t., 1903 m., pusl. 113—114.

nes visa, kas žmogaus yra pasiekiama, nėra tobula. Tai pastebima kiekviename žmogaus kūriny. Nėra tobulios valstybinės konstitucijos, nėra tobulių įstatymų. Nei vienas romanas, nei vienas teatrinis veikalas nepasiekė net ir to idealo, kurį laikė tokiu kūrinių atsiradimo laikatarpis. Tą patį galima pasakyti apie muzikos, plastikinio meno kūrinius. Dėliai tų netobulumų galima net džiaugtis, nes tas, kas nereikalingas būtų tolesnio tobulėjimo reikštų stagnaciją; ši reikštų atgaleigą, iš kurios grėstų mirtis pavieniam žmogui, tautai, valstybiniam gyvenimui, menui, mokslui". Toliau (pusl. 114) Cantor vėl teisingai pastebi, jog kalbant apie kokį kūrinį, reikia jis skirti nuo kūrėjo, kuris visuomet liks žmogumi su jo įgimtais idealais, papročiais, taisyklėmis. Autorius negali to atsisakyti, tad tas turi paveikti jo darbo rezultatus. Čia jis primena, jog baigdamas savo kalbą tarptautiniame matematikų kongrese Paryžiuje (1900 m.), pasisakęs, kaip jam vaizduojasi matematikos istorijos po 1758 m. tęsinys, bet čia jis pasiaiškina: „Tuo norėjau tik pasakyti, kaip aš prijungčiau kaip tęsinį savo trims tomams tolesnius istorijos tomus, jeigu da būčiau tiek jaunas, kad tikrai galėčiau tokį sumanymą įvykdyti". Vadinasi, Cantor, kuris nepaprastu atsidėjimu ir karšta meile piešė matematikos praeitį, nebuvo aklai įsimylėjęs į didį savo veikalą, nelaikė jo tobuliu, bet turėjo kuo ir pasiteisinti.

* *
*

Darydami išvadą iš viso, kas suminėta šiame straipsny apie matematikos istoriografiją ir Moritz'ą Cantor'ą, turime pripažinti, jog būdamas ne koks genialus naujų idėjų kūrėjas, bet tik neprastai darbingas ir atsidėjęs tyrinėtojas matematikos istorijos srity, jis surankiojo to mokslo žinias, išblaškytas įvairiuose kitų mokslo sričių raštuose, subūrė jas draugėn, iš jų sukūrė visų pripažintą mokslo discipliną ir iškovojo jai garbingą vietą aukštosiose mokyklose kitų mokslų tarpe.

Matematikos istorijai ir istorikams, kaip ir kokiai institucijai, galime pritaikyti šį gražų palyginimą, kurį pavartojo savo didžiulio veikalo prakalboje Kaz. Morawski, rašydamas Jogailos universiteto (Krakove) ir jo veikėjų istoriją*): „Ištisoje jo (univer-

*) Kaz. Morawski — Historya Uniwersytetu Jagiellońskiego, 2. t. Kraków, 1908.

siteto) mokytojų procesijoje, nelyginant kaip Kserkso armijoje, gal buvo daug žmonių ir maža tikrų vyrų. Bet net ir nedidelis, paprastas žmogus, jei jis yra sąžiningas mokytojas, gali likti dideliu sėjėjų; jo žodžiai gali sukurti darbus ir mintis, kurios išaugs tik po amžių. Čia kaip tik glūdi didelė mokytojo, jo žodžių ir visos jo pasiuntinybės atsakomybė; stebūklas, kad gamintųsi duona iš žodžių, kuriuos jis beria savo klausytojams, gali čia kartotis kas diena. Todel, greta didžiųjų vyrų, ir paprastesni žmonės turėjo gauti vietos šioje mūsų dvasinių protėvių galerijoje; jie yra garbingesni už daugelį praeities įžimybių, kurie buvo piešiami jiems mirus, o kartais ir dar gyviems esant".

Negausingoje matematikos istorikų procesijoje Moritz Cantor turi būti laikomas pirmuoju didžiuoju žmogumi. Ir jeigu ateity atsiras daugelis didesnių už jį žmonių, vis tiek jo nuopelnai amžius liks atmintini, nes jis atliko darbus, be kurių ir tie laukiamieji didieji žmonės negalėtų ateiti.

Lietuvos Universiteto Matematikos-Gamtos Fakulteto leidiniai:

	Kaina lt. ct.
1. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai I tomas 1922 m.	10,—
2. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai II tomas 1923 m.	10,—
3. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai III tomas 1924—1926 m.	20,—
4. Matematikos-Gamtos Fakulteto Darbai IV tomas 1927—1928 m.	25,—
5. *Prof. P. Matulionis.* Sumedėjusių augalų skirstymui medžiaga 1923 m.	3,—
6. *Prof. T. Ivanauskas.* Vadovėlis vabzdžiams rinkti 1924 m.	3,50
7. *Prof. K. Regelis.* Vadovėlis augalams rinkti 1925 m.	2,—
8. *Lab. A. Minkevičius.* Bulvių puvimo grybelis ir kaip su juo kovoti. 1926 m.	—
9. *Prov. K. Grybauskas.* Paletrūnas oželinis 1926 m.	—
10. *Prov. K. Grybauskas.* Garstyčia baltoji 1926 m.	—
11. *Prov. K. Grybauskas.* Vaistingieji Lietuvos laukų augalai ir jų pritaikymas 1927 m.	5,—
12. *Prof. V. Čepinskis.* Elektroninė valentingumo teorija 1928 m.	6,—
13. *Prov. K. Grybauskas.* Ramunėliai antroji laida 1928 m.	0,15
14. *Prov. K. Grybauskas.* Pipirmėtė antroji laida 1928 m.	0,20
15. *Asist. A. Žvironas.* 18 Fizikos praktikos darbų 1928 m.	2,—
16. *Prov.K. Grybauskas.* Ybiškė švelnioji 1928 m.	0,50
17. *Prof. O. Volk'as.* Paprastųjų ir dalinių diferencialinių lygčių teorijos paskaitos 1929 m.	20,—
18. *Prof. F. Butkevičius.* Elementarinis kokybinis analyzis 1929 m.	20,—
19. *Prof. V. Čepinskis.* Cheminė pusiausvira II dal. 1930 m.	15,—
20. *Prof. V. Čepinskis.* Chemijos kinetika ir fotochemija III dal. 1930 m.	15,—

Matematikos-Gamtos Fakulteto leidinių galima pirkti Lietuvos Mokytojų Profesinės Sąjungos Knygyne „SPAUDOS FONDAS" Kaunas, Laisvės Alėja 60 Nr.

Be to, Botanikos Sodo leidinių: Minkevičiaus „Bulvių puvimo grybelis ir kaip su juo kovoti". Prof. K. Grybausko: „Paletrūnas oželinis" ir „Garstyčia baltoji" galima gauti Lietuvos Universiteto Botanikos Sode veltui, tik apmokant siuntimo išlaidas. Prof. K. Grybausko: „Ramunėliai", „Pipirmėtė", „Ybiškė švelnioji", ir „Vaistingieji Lietuvos laukų augalai ir jų pritaikymas" taip pat galima gauti Botanikos sode, prisiunčiant atatinkamą kiekį pašto ženklų prašomosios knygutės vertei ir siuntimo išlaidoms apmokėti. Bot. sodo adr.: **Kaunas, Aukštoji Freda, Botanikos sodas.**